Gabarito Lista 1

Thiago Ritto

1. Devemos achar a relação $F = ma$, podemos achar o vetor aceleração de duas maneiras:

   - Derivando o vetor posição e o vetor velocidade, até encontrar o vetor aceleração.

     Vetor posição:

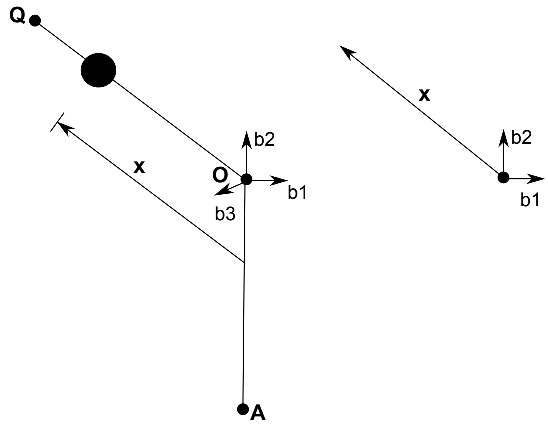

Figura 1: Vetor Posição.

$$\mathbf{r}^{P/O} = -x\sin\theta\mathbf{b}_1 + x\cos\theta\mathbf{b}_2 \tag{1}$$

Derivadas das bases:

$$\frac{^A d}{dt}\mathbf{b}_1 = w\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_1 = -w\mathbf{b}_3 \tag{2}$$

$$\frac{^A d}{dt}\mathbf{b}_2 = w\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_2 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{{}^{A}d}{dt}\mathbf{b}_3 = w\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = w\mathbf{b}_1 \tag{4}$$

Vetor velocidade:

$$\frac{{}^{A}d}{dt}(\mathbf{r}^{P/O}) =^{A} \mathbf{v}^{P} = -\dot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + x\sin\theta w\mathbf{b}_3 + \dot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2 \tag{5}$$

Observação: A derivada de θ é igual a zero pois o ângulo é constante.

Vetor Aceleração:

$$^{A}\mathbf{a}^{P} = -\ddot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + \dot{x}w\sin\theta w\mathbf{b}_3 + \ddot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2 + \dot{x}w\sin\theta\mathbf{b}_3 + x\dot{w}\sin\theta\mathbf{b}_3 + xw^2\sin\theta\mathbf{b}_1 \tag{6}$$

Reorganizando o vetor aceleração:

$$^{A}\mathbf{a}^{P} = (-\ddot{x}\sin\theta + xw^2\sin\theta)\mathbf{b}_1 + (\ddot{x}\cos\theta)\mathbf{b}_2 + (2\dot{x}w\sin\theta + x\alpha\sin\theta)\mathbf{b}_3 \tag{7}$$

As forças de reação na esfera são:

$$F = (F_1\cos\theta)\mathbf{b}_1 + (F_1\sin\theta - mg)\mathbf{b}_2 + (F_3)\mathbf{b}_3 \tag{8}$$

Logo as equações de movimento são:

$$F_1\cos\theta = -\ddot{x}\sin\theta + xw^2\sin\theta \tag{9}$$

$$F_1\sin\theta - mg = \ddot{x}\cos\theta \tag{10}$$

$$F_3\sin\theta = 2\dot{x}w\sin\theta + x\alpha\sin\theta \tag{11}$$

- Usando o Teorema Cinemático.

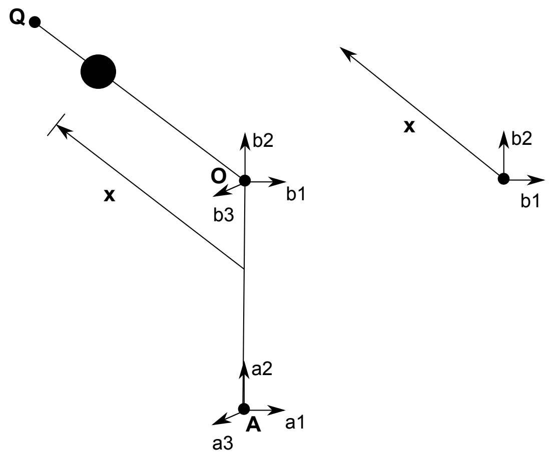

Figura 2: Vetor Posição.

Velocidade:

$$^{A}\mathbf{v}^{P} =^{A} \mathbf{v}^{O} +^{B} \mathbf{v}^{P} +^{A} \boldsymbol{\omega}^{B} \times \mathbf{r}^{P/O}\,, \tag{12}$$

$$^{A}\mathbf{v}^{O} = 0 \tag{13}$$

$$^{B}\mathbf{v}^{P} = -\dot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + \dot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2 \tag{14}$$

$$^{A}\boldsymbol{\omega}^{B} \times \mathbf{r}^{P/O} = w\mathbf{b}_2 \times (-x\sin\theta\mathbf{b}_1 + x\cos\theta\mathbf{b}_2) = xw\sin\theta\mathbf{b}_3 \tag{15}$$

$$^{A}\mathbf{v}^{P} = -\dot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + \dot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2 + xw\sin\theta\mathbf{b}_3 \tag{16}$$

Aceleração:

$$^{A}\mathbf{a}^{P} =^{A} \mathbf{a}^{O} +^{B}\mathbf{a}^{P} +^{A}\boldsymbol{\omega}^{B} \times (^{A}\boldsymbol{\omega}^{B} \times \mathbf{r}^{P/O}) +^{A}\boldsymbol{\alpha}^{B} \times \mathbf{r}^{P/O} + 2^{A}\boldsymbol{\omega}^{B} \times ^{B}\mathbf{v}^{P}\,. \tag{17}$$

$$^{A}\mathbf{a}^{O} = 0 \tag{18}$$

$$ {}^B\mathbf{a}^P = -\ddot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + \ddot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2 \tag{19} $$

$$ {}^A\boldsymbol{\omega}^B \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{r}^{P/O}) = w\mathbf{b}_2 \times (xw\sin\theta\mathbf{b}_3) = xw^2\sin\theta\mathbf{b}_1 \tag{20} $$

$$ {}^A\boldsymbol{\alpha}^B \times \mathbf{r}^{P/O} = \alpha\mathbf{b}_2 \times (-x\sin\theta\mathbf{b}_1 + x\cos\theta\mathbf{b}_2) = x\alpha\sin\theta\mathbf{b}_3 \tag{21} $$

$$ 2{}^A\boldsymbol{\omega}^B \times {}^B\mathbf{v}^P = 2w\mathbf{b}_2 \times (-\dot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + \dot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2) = 2w\dot{x}\sin\theta\mathbf{b}_3 \tag{22} $$

$$ {}^A\mathbf{a}^P = -\ddot{x}\sin\theta\mathbf{b}_1 + \ddot{x}\cos\theta\mathbf{b}_2 + xw^2\sin\theta\mathbf{b}_1 + x\alpha\sin\theta\mathbf{b}_3 + 2w\dot{x}\sin\theta\mathbf{b}_3 \tag{23} $$

$$ {}^A\mathbf{a}^P = (-\ddot{x}\sin\theta + xw^2\sin\theta)\mathbf{b}_1 + (\ddot{x}\cos\theta)\mathbf{b}_2 + (x\alpha\sin\theta + 2w\dot{x}\sin\theta)\mathbf{b}_3 \tag{24} $$

Logo as equações de movimento são:

$$ F_1\cos\theta = -\ddot{x}\sin\theta + xw^2\sin\theta \tag{25} $$

$$ F_1\sin\theta - mg = \ddot{x}\cos\theta \tag{26} $$

$$ F_3\sin\theta = 2\dot{x}w\sin\theta + x\alpha\sin\theta \tag{27} $$

Como vemos acima, para ambas as formas de resolver o problema as equações são iguais!

2. Vamos usar a relação de quantidade de movimento linear (G) e quantidade de movimento angular (H) para encontrar os valores pedidos.Como não há forças externas atuando no sistema, devemos considerar a conservação da quantidade de movimento linear (G):

$$G_1 = G_2 \tag{28}$$

$$mV = mV_1 + 2mV_{cm} \tag{29}$$

$$V = V_1 + 2V_{cm} \tag{30}$$

E também a conservação da quantidade de movimento angular (H):

$$H_1 = H_2 \tag{31}$$

$$mrV = mrV_1 + I_{cm}w \tag{32}$$

$$mrV = mrV_1 + (2mr^2)w \tag{33}$$

$$V = V_1 + (2r)w \tag{34}$$

Como o choque é perfeitamente elástico e a colisão é entre partículas de mesma m: $V_1 = 0$,e como houve a conservação total de energia a velocidade da massa A imediatamente após o impacto é igual a V.

Assim:

Velocidade do centro de massa:

$$V = V_1 + 2V_{cm} \tag{35}$$

$$V = 2V_{cm} \tag{36}$$

$$V_{cm} = \frac{V}{2} \tag{37}$$

Velocidade angular da barra depois do impacto:

$$V = V_1 + (2r)w \tag{38}$$

$$V = (2r)w \tag{39}$$

$$w = \frac{V}{2r} \tag{40}$$

A energia cinética antes e após o impacto:

$$K_i = \frac{mV^2}{2} \tag{41}$$

$$K_i = \frac{2mV_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm}w^2}{2} \tag{42}$$

$$K_i = \frac{2mV_{cm}^2}{2} + \frac{(2mr^2)w^2}{2} \tag{43}$$

3. Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i\,, \tag{44}$$

onde $L = K - \Phi$, q_i são as coordenadas generalizadas, e Q_i são as forças generalizadas.

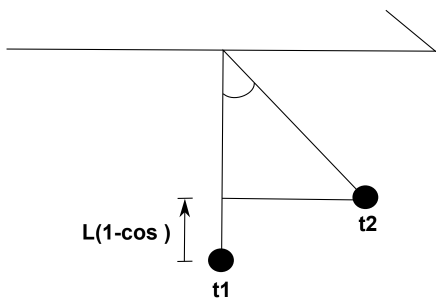

Figura 3: Pêndulo.

Definindo o momento em que o pêndulo está em t1 como nível zero para a energia potencial gravitacional, tem-se:

$$\Phi = mgl(1 - \cos\theta) \tag{45}$$

A energia cinética pode ser escrita como:

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} \tag{46}$$

As coordenadas generalizadas são $q_1 = \theta$, pois há nenhuma força que realize trabalho (excluindo a força da gravidade, que é levada em conta na energia potencial). Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos\theta)) = ml^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos\theta)) = -mgl\sin\theta \end{aligned} \tag{47}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \tag{48}$$

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{49}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{50}$$

4. A figura foi desenhada abaixo:

   Coordenadas cilíndricas:

$$x = rcos\theta \tag{51}$$

$$y = rsin\theta \tag{52}$$

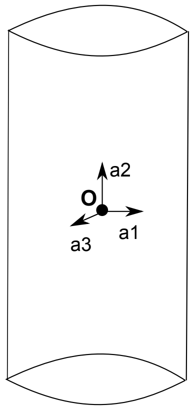

Figura 4: Cilindro.

$$z = z \tag{53}$$

$$dm = \rho r d\theta dr dz \tag{54}$$

$$I_{xy} = \int_m xy dm = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r^3 \cos\theta \sin\theta d\theta dr dz \tag{55}$$

$$I_{xy} = 0 \tag{56}$$

$$I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r^3 d\theta dr dz \tag{57}$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}\pi h \rho (r_e^4 - r_i^4) \tag{58}$$

5. Devemos somar o momento de inércia da placa com o momento de inércia da esfera:

$$[I^0] = [I^0_{placa}] + [I^0_{esfera}] \tag{59}$$

Considerando como dado da placa:

$$I_{xx} = \frac{1}{12} m l^2 \tag{60}$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} m l^2 \tag{61}$$

$$I_{zz} = \frac{1}{6} m l^2 \tag{62}$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{zy} = 0 \tag{63}$$

$$[I^0_{xx}] = I_{xx} + m(y^2 + z^2) = I_{xx} + m(y^2) = I_{xx} + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2 \tag{64}$$

$$[I^0_{yy}] = I_{yy} + m(x^2 + z^2) = I_{yy} + m(x^2) = \frac{1}{3} m l^2 \tag{65}$$

$$[I^0_{zz}] = I_{zz} + m(x^2 + y^2) = I_{zz} + m(x^2 + y^2) = \frac{2}{3} m l^2 \tag{66}$$

$$[I^0_{xy}] = I_{xy} - mxy = -\frac{1}{4} m l^2 \tag{67}$$

$$[I^0_{xz}] = I_{xz} - mxz = I_{xz} = 0 \tag{68}$$

$$[I^0_{yz}] = I_{yz} - myz = I_{yz} = 0 \tag{69}$$

$$[I^O_{placa}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} m l^2 & -\frac{1}{4} m l^2 & 0 \\ -\frac{1}{4} m l^2 & \frac{1}{3} m l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} m l^2 \end{pmatrix} \tag{70}$$

Considerando como dado da esfera:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m r^2 \tag{71}$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{zy} = 0 \tag{72}$$

$$[I^0_{xx}] = I_{xx} + m(y^2 + z^2) = I_{xx} + m(y^2) = I_{xx} + \frac{1}{4}ml^2 = m(\frac{7}{5}r^2 + \frac{1}{4}l^2) \tag{73}$$

$$[I^0_{yy}] = I_{yy} + m(x^2 + z^2) = I_{yy} + m(x^2) = m(\frac{7}{5}r^2 + \frac{1}{4}l^2) \tag{74}$$

$$[I^0_{zz}] = I_{zz} + m(x^2 + y^2) = I_{zz} + m(x^2 + y^2) = m(\frac{2}{5}r^2 + \frac{1}{4}l^2) \tag{75}$$

$$[I^0_{xy}] = I_{xy} - mxy = -\frac{1}{4}ml^2 \tag{76}$$

$$[I^0_{xz}] = I_{xz} - mxz = I_{xz} = -\frac{1}{2}mlr \tag{77}$$

$$[I^0_{yz}] = I_{yz} - myz = I_{yz} = -\frac{1}{2}mlr \tag{78}$$

$$[I^O_{esfera}] = \begin{pmatrix} m(\frac{7}{5}r^2 + \frac{1}{4}l^2) & -\frac{1}{4}ml^2 & -\frac{1}{2}mlr \\ -\frac{1}{4}ml^2 & m(\frac{7}{5}r^2 + \frac{1}{4}l^2) & -\frac{1}{2}mlr \\ -\frac{1}{2}mlr & -\frac{1}{2}mlr & m(\frac{2}{5}r^2 + \frac{1}{4}l^2) \end{pmatrix} \tag{79}$$