Dinâmica 2, Teste 2, 20/05/2015
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

1) Considere o sistema mostrado na Fig. 1, formado por um disco de diâmetro 300mm e massa 0,5kg, e uma barra de comprimento 300mm e massa desprezível. O disco gira $120RPM\mathbf{b}_1$, quando uma pessoa que está segurando na extremidade da barra, ponto O, força uma precessão $30RPM\mathbf{b}_2$.

(a) Nesse instante, calcule o momento giroscópico (magnitude, direção e sentido).

Primeiro vamos converter as unidades: $(30RPM)2\pi/60 = 3,1416rad/s$ e $(120RPM)2\pi/60 = 12,5664rad/s$.

O momento de inércia do sistema (eixo $\mathbf{b}_1$) em relação ao ponto O vale $I^{S/O} = 1/2(0,5).(150 \times 10^{-3})^2 = 0,0056kgm^2$. A quantidade de movimento angular inicial do sistema $H^{S/O} = I^{S/O}12,5664 = 0,0707kgm^2/s$ na direção de $\mathbf{b}_1$. Quando forçamos a precessão, $\mathbf{H}$ muda de direção, logo aparece um momento giroscópico no sentido negativo de $\mathbf{b}_3$ (lembre que $\mathbf{H}$ persegue $\mathbf{M}$).

Usando a Lei de Euler (3a equação):

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + I_{yy}\omega_y\Omega_x - I_{xx}\omega_x\Omega_y \tag{1}$$

onde $\omega_x = \omega_{spin}$, $\omega_y = \Omega_y = \Omega_{precessao}$, e os outros componentes valem zero. Logo:

$$M_{gir} = -I_{xx}\omega_x\Omega_y = -H\Omega_{precessao} \tag{2}$$

O valor do momento giroscópico vale então:

$$M_{gir} = -0,0707.3,1416 = -0,2221Nm \tag{3}$$

(b) O roda tenderá a subir ou a descer?

O momento M_{gir} aparece no sentido negativo de $\mathbf{b}_3$, ou seja, seria necessário esse momento para manter $\mathbf{H}$ na direção de $\mathbf{b}_1$ e a velocidade de precessão na direção de $\mathbf{b}_2$. Como o ponto O está livre, a pessoa sentirá o sistema tentar subir; sentido positivo de $\mathbf{b}_2$.

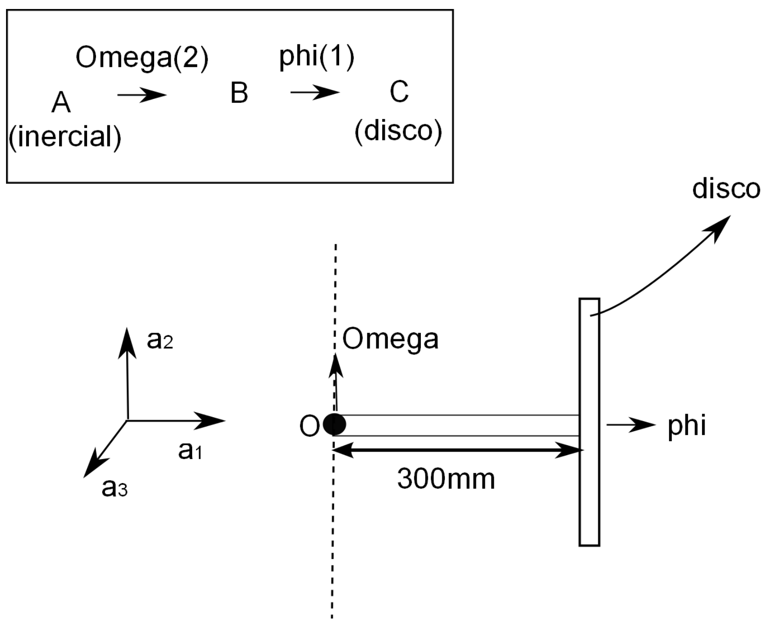

Figura 1: Disco girando.

2) Considere um sistema mecânico ($g = 9,81 m/s^2$ e $l = 1m$) que seja representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$3\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} + 8\ddot{\theta}_1 + 9\frac{g}{l}sin(\theta_1) = 0 \tag{4}$$

$$-3\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} + 2\ddot{\theta}_2 + 3\frac{g}{l}\sin(\theta_2) = 0 \tag{5}$$

(a) Reescreva a equação do sistema na forma $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$.

Definindo $\mathbf{y} = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \frac{-3\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} - 9\frac{g}{l}\sin(\theta_1)}{8} \\ \frac{3\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} - 3\frac{g}{l}\sin(\theta_2)}{2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

(b) Calcule a matriz Jacobiana do sistema no ponto zero, $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\theta}_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Logo, para $\theta_1 = \theta_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, sobrarão apenas os termos $(-9g/8l)$ e $(-3g/2l)$:

$$J(\mathbf{y}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -11,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14,7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$