Prof. Thiago Ritto

Considere o sistema mostrado na Figura 1. Três barras (m, l) estão conectadas da seguinte forma. A barra A gira com velocidade constante Ω em torno do eixo $\mathbf{a}_2$ e está soldada na barra B. A barra C está pinada na barra B, tendo liberdade de girar em torno do eixo $\mathbf{b}_1$. (1) Obtenha a equação de movimento para o ângulo θ, que mede o giro da barra C. Dica: calcule os momentos em relação ao ponto O (pino) para que as forças de reação do pino não apareçam na equação de movimento. (2) Calcule os pontos de equilíbrio para θ. (3) Verifique se os pontos de equilíbrio são estáveis ou instáveis. Considere um amortecimento viscoso no pino, proporcional à velocidade angular da barra C, com coeficiente c.

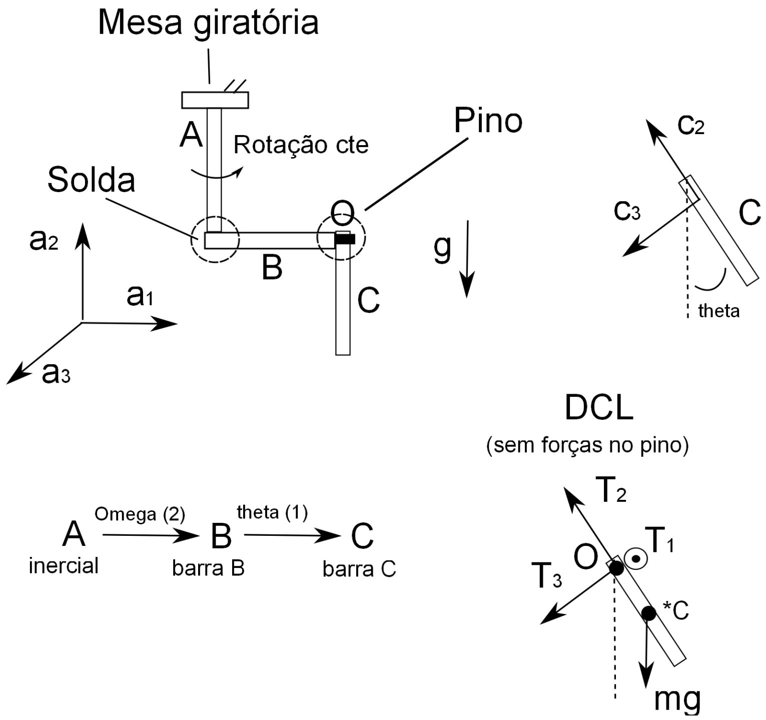

Figura 1: Ilustração do problema.

1 Referenciais, bases e matrizes de transformação

Serão considerados 3 referenciais. O referencial inercial A, o referencial B, que gira Ω em relação a A e é solidário à barra B, e o referencial C, que gira θ em relação à B e é solidário à barra C.

A base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ é solidária ao referencial A, a base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ é solidária ao referencial B e a base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ é solidária ao referencial C.

A matriz de transformação abaixo transforma vetores escritos na base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ para vetores escritos na base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

$$
{}_C T_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} , \tag{1}
$$

2 Equação de movimento

Será usada a Lei de Euler, com um termo extra devido ao ponto O ter velocidade não nula:

$$
\mathbf{M}^O = \frac{{}^A d(I^O \; {}^A\boldsymbol{\omega}^C)}{dt} + m\mathbf{r}^{*C/O} \times \mathbf{a}^O \,, \tag{2}
$$

onde $\mathbf{M}^O$ é a resultante dos momentos em relação ao ponto O, que é dada por:

$$
\mathbf{M}^O = -\frac{1}{2} ml \sin\theta \mathbf{c}_1 + T_2\mathbf{c}_2 + T_3\mathbf{c}_3 + T_1\mathbf{c}_1 \,, \tag{3}
$$

onde $T_1 = -c\dot{\theta}$, I^O é o tensor de inércia em relação ao ponto O e ${}^A\boldsymbol{\omega}^C$ é o vetor velocidade angular do referencial C em relação ao referencial A:

$$
I^O = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix} , \tag{4}
$$

$$
{}^A\boldsymbol{\omega}^C = \boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{b}_2 + \dot{\theta}\mathbf{c}_1 = \Omega\cos\theta\mathbf{c}_2 - \Omega\sin\theta\mathbf{c}_3 + \dot{\theta}\mathbf{c}_1 \,, \tag{5}
$$

Agora falta calcular a aceleração $\mathbf{a}^O$, em relação ao referencial inercial:

$$
\mathbf{a}^O = -\Omega^2 l \mathbf{c}_1 \,. \tag{6}
$$

A posição do centro de massa da barra C em relação à O é dado por $\mathbf{r}^{*C/O} = -\frac{l}{2}\mathbf{c}_2$. Estamos interessados apenas na primeira equação (relacionada à direção $\mathbf{c}_1$), onde não aparecem os torques reativos, e a única incógnica é o ângulo θ. Como I^O é diagonal e constante, a primeira equação é dada por

$$
M_x = I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z + \text{termo extra} \,, \tag{7}
$$

mas o termo extra é zero pois $\mathbf{r}^{*C/O} \times \mathbf{a}^O$ não gera nenhuma componente em $\mathbf{c}_1$. Então a equação de movimento é dada por

$$
-\frac{1}{2}mgl\sin\theta - c\dot{\theta} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}ml^2(-\Omega^2\sin\theta\cos\theta) \,. \tag{8}
$$

ou

$$\frac{1}{3}l\ddot{\theta} - \frac{1}{3}l(\Omega^2 \sin\theta\cos\theta) + \frac{1}{2}g\sin\theta + \frac{c}{ml}\dot{\theta} = 0\,. \tag{9}$$

Para calcular os pontos de equilíbrio fazemos $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, e chegamos a

$$\left(\frac{1}{2}g - \frac{1}{3}l\Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0\,, \tag{10}$$

cujos pontos de equilíbrio são

$$\sin\theta = 0 \longrightarrow \theta_0 = \{0, \pi\}\text{rad}\,. \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}g - \frac{1}{3}l\Omega^2\cos\theta = 0 \longrightarrow \theta_0 = \left\{acos\left(\frac{3g}{2l\Omega^2}\right) = 0\right\}\,. \tag{12}$$

Vamos considerar os seguintes dados: $\Omega = 100\text{RPM} = 10,5$ rad/s, $m = 0,5$kg, $g = 10\text{m/s}^2$, $c = 1$ Nms e $l = 0,3$m. Nesse caso, $acos\left(\frac{3g}{2l\Omega^2}\right) = 1,1\text{rad}{=}63^o$.

Para verificar a estabilidade do sistema dos pontos de equilíbrio, definimos $\mathbf{y} = (\theta, \dot{\theta})$ e reescrevemos a equação na forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ f_2(\mathbf{y}) \end{pmatrix}\,. \tag{13}$$

Logo, usando a Eq.9, chega-se a

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{3}{2l}g\sin\theta + \Omega^2\sin\theta\cos\theta - c/(ml)\dot{\theta} \end{pmatrix}\,. \tag{14}$$

Para verificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_0$, devemos calcular os autovalores da matriz jacobiana J do sistema no ponto de equilíbrio. Se a parte real de algum autovalor de J for positiva, o sistema é instável, e se a parte real de todos os autovalores de J for negativa, o sistema é estável. Note que expandindo $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ em série de Taylor, ficando apenas com o termo linear, fazendo $\delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, e sabendo que $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, chega-se a

$$\delta\dot{\mathbf{y}} = J\big|_{\mathbf{y}_0}\delta\mathbf{y}\,, \tag{15}$$

onde a matriz Jacobiana é dada por

$$J\big|_{\mathbf{y}_0} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial\theta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\dot{\theta}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial\theta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\dot{\theta}} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{y}_0}\,. \tag{16}$$

e substituindo os valores dos parâmetros, tem-se

$$J|_{\mathbf{y}_0} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2l} g\cos\theta + \Omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \frac{3}{2}\Omega\dot{\theta}\cos\theta & -c/(ml) \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{y}_0} \tag{17}$$

Para $\mathbf{y}_0 = (\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0)$ temos:

$$J|_{\mathbf{y}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 60.25 & -6.7 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

cujos autovalores são 5.1 e -11.8, logo o sistema é instável. Para $\mathbf{y}_0 = (\pi, 0)$ temos:

$$J|_{\mathbf{y}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 160.25 & -6.7 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

cujos autovalores são 9.8 e -16.4, logo o sistema também é instável. Para $\mathbf{y}_0 = (1.1, 0)$ temos:

$$J|_{\mathbf{y}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -87.6 & -6.7 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

cujos autovalores são $-3.3 \pm 8.7i$, logo o sistema é estável.