Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

A Fig. 1 ilustra um brinquedo de um parque de diversões. Estamos interessados na aceleração dos cérebros, p_1 e p_2, de duas pessoas com alturas diferentes, que se encontram imóveis dentro de um carro (referencial D). A mesa giratória gira $\Omega_0 \mathbf{a}_2$ em relação ao referencial inercial A; a haste $\overline{PQ}$ está soldada na mesa; o carro pode girar $\Omega_1 \mathbf{b}_2$; e em seguida $\Omega_2 \mathbf{c}_3$. Observe que $\Omega_0 = \dot{\theta}_0$, $\Omega_1 = \dot{\theta}_1$ $\Omega_2 = \dot{\theta}_2$.

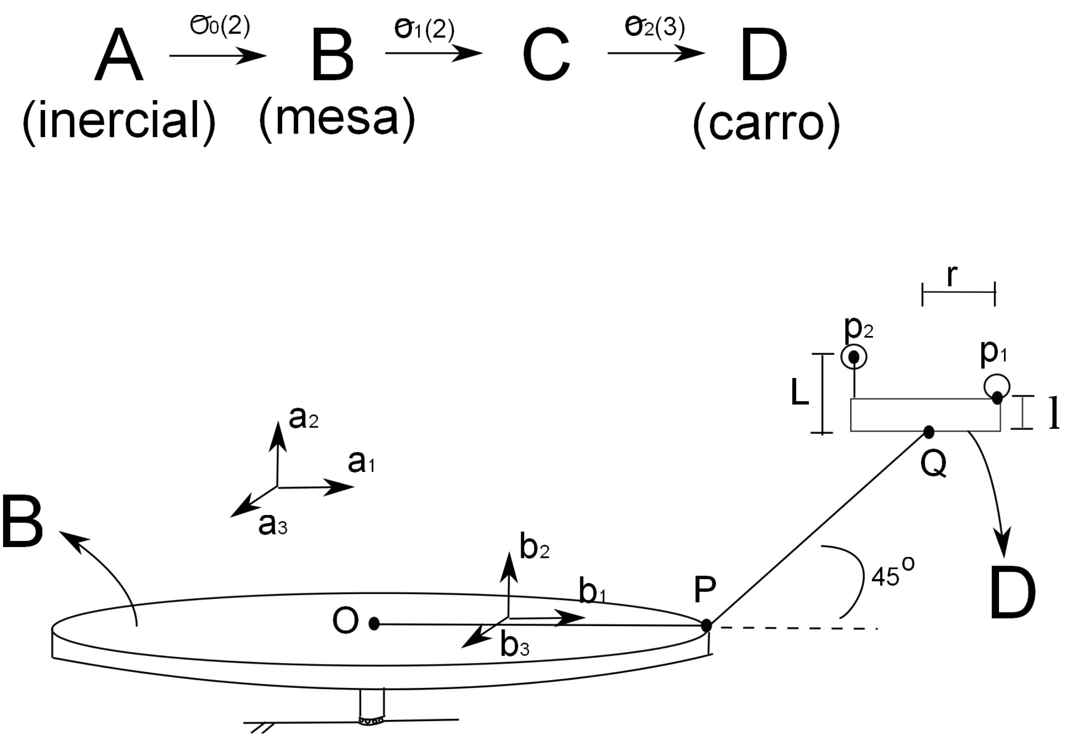

Figura 1: Brinquedo de um parque de diversões*brinquedo*.

Calcule a magnitude (máxima) da aceleração de p_1 e p_2, no referencial inercial, para os casos abaixo.

Caso 1: $\Omega_0 = 5$ RPM, $\Omega_1 = 0$ RPM, $\Omega_2 = 0$ RPM.

Caso 2: $\Omega_0 = 5$ RPM, $\Omega_1 = 10$ RPM, $\Omega_2 = 0$ RPM.

Caso 2: $\Omega_0 = 5$ RPM, $\Omega_1 = 10$ RPM, $\Omega_2 = 5$ RPM.

Dados: $\overline{OP} = \overline{PQ} = 5$m, $L = r = 1$m, $l = 0,5$m.

Matrizes de transformação

$$[_AT_B] = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & 0 & \sin\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}, \; [_BT_C] = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$[_CT_D] = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Caso 1

No caso 1 há apenas uma rotação, Ω_0, e as acelerações de p_1 e p_2 são dadas por

$$^A\mathbf{a}^{p_1} =^A \boldsymbol{\omega}^B \times (^A\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{r}^{p_1/O}) = {}^A_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B {}^A_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B {}_B\mathbf{r}^{p_1/O}. \tag{1}$$

$$^A\mathbf{a}^{p_2} = {}^A_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B {}^A_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B {}_B\mathbf{r}^{p_2/O}. \tag{2}$$

Onde

$${}^A_B\boldsymbol{\omega}^B = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}^A_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_B\mathbf{r}^{p_1/O} = \begin{pmatrix} \overline{OP} + \overline{PQ}\cos(\pi/4) + r \\ \overline{PQ}\sin(\pi/4) + l \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}_B\mathbf{r}^{p_2/O} = \begin{pmatrix} \overline{OP} + \overline{PQ}\cos(\pi/4) - r \\ \overline{PQ}\sin(\pi/4) + L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$${}^A_B\mathbf{a}^{p_1} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow ||^A\mathbf{a}^{p_1}|| = 2.6m/s^2$$

$${}^A_B\mathbf{a}^{p_2} = \begin{pmatrix} -2.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow ||^A\mathbf{a}^{p_2}|| = 2.1m/s^2$$

A aceleração de p_1 é maior pois a distância deste ponto para o ponto O é maior.

2 Caso 2

No caso 2 há duas rotações no mesmo plano, Ω_0 e Ω_1, e as acelerações de p_1 e p_2 são dadas por

$$ {}^{A}\mathbf{a}^{p_1} = [{}_{C}T_{B}]{}_{B}^{A}\mathbf{a}^{Q} + {}_{C}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{C}{}_{C}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{C}{}_{C}\mathbf{r}^{p_1/Q}. \tag{3} $$

$$ {}^{A}\mathbf{a}^{p_2} = [{}_{C}T_{B}]{}_{B}^{A}\mathbf{a}^{Q} + {}_{C}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{C}{}_{C}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{C}{}_{C}\mathbf{r}^{p_2/Q}. \tag{4} $$

onde

$$ {}_{C}\mathbf{r}^{p_1/Q} = \begin{pmatrix} r \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}_{C}\mathbf{r}^{p_2/Q} = \begin{pmatrix} -r \\ L \\ 0 \end{pmatrix}. $$

$$ {}_{C}^{A}\boldsymbol{\omega}^{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_0 + \Omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}_{C}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_0 + \Omega_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\Omega_0 + \Omega_1) & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

A aceleração do ponto Q é calculada da seguinte forma ${}^{A}\mathbf{a}^{Q} = {}_{B}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{B}{}_{B}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{B}\mathbf{r}^{Q/O}$, onde ${}_{B}\mathbf{r}^{Q/O} = \begin{pmatrix} \overline{OP} + \overline{PQ}\cos(\pi/4) \\ \overline{PQ}\sin(\pi/4) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Logo, ${}_{B}^{A}\mathbf{a}^{Q} = \begin{pmatrix} -2.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e ${}_{C}^{A}\mathbf{a}^{Q} = \begin{pmatrix} -2.3\cos\theta_1 \\ 0 \\ -2.3\sin\theta_1 \end{pmatrix}$.

Para cada θ_1 tem-se um resultado diferente. A figura 2 mostra como a magnitude da aceleração (m/s^2) varia em duas voltas de θ_1. Para $\theta_1 = 90^o$ (e a cada 180^o) as magnitudes das acelerações de p_1 e p_2 coincidem. Além disso, as magnitudes máximas e mínimas para os dois pontos são as mesmas. Isso se deve ao fato da distância na direção de $\mathbf{c}_1$ ser a mesma, r, entre os pontos analisados e o ponto Q.

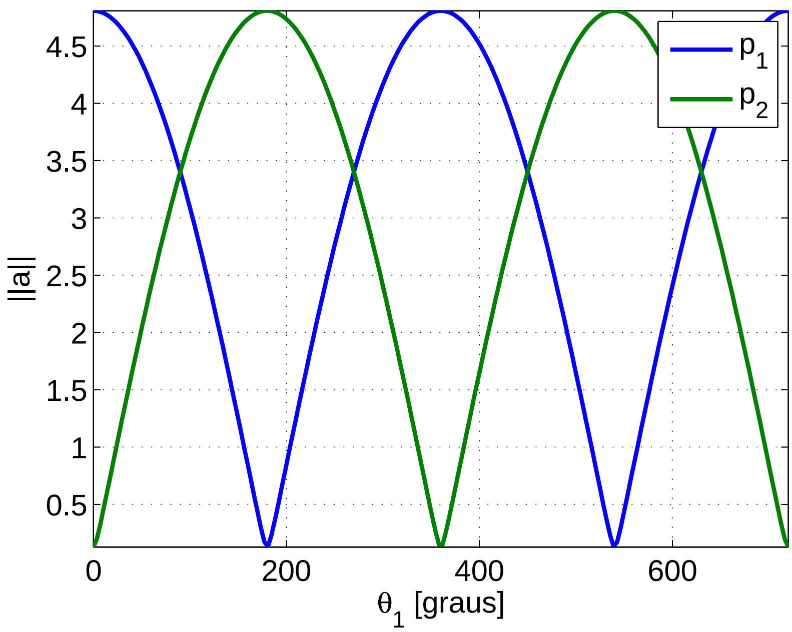

Figura 2: Caso 2

3 Caso 3

No caso 3 há duas rotações, e as acelerações de p_1 e p_2 são dadas por

$$^{A}\mathbf{a}^{p_1} = [_D T_C]^{A}_{C}\mathbf{a}^{Q} + {}^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{D}\,{}^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{D}\,{}_{D}\mathbf{r}^{p_1/Q} + {}^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{D}\,{}_{D}\mathbf{r}^{p_1/Q}. \tag{5}$$

$$^{A}\mathbf{a}^{p_2} = [_D T_C]^{A}_{C}\mathbf{a}^{Q} + {}^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{D}\,{}^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{D}\,{}_{D}\mathbf{r}^{p_2/Q} + {}^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{D}\,{}_{D}\mathbf{r}^{p_2/Q}. \tag{6}$$

Onde

$$_{D}\mathbf{r}^{p_1/Q} = \begin{pmatrix} r \\ l \\ 0 \end{pmatrix},\ {}_{D}\mathbf{r}^{p_2/Q} = \begin{pmatrix} -r \\ L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$^{A}_{D}\boldsymbol{\omega}^{D} = [_D T_C]\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_0 + \Omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Omega_0 + \Omega_1)\sin\theta_2 \\ (\Omega_0 + \Omega_1)\cos\theta_2 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

$$^{A}_{D}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_2 & (\Omega_0 + \Omega_1)\cos\theta_2 \\ \Omega_2 & 0 & -(\Omega_0 + \Omega_1)\sin\theta_2 \\ -(\Omega_0 + \Omega_1)\cos\theta_2 & (\Omega_0 + \Omega_1)\sin\theta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

O vetor aceleração angular é a derivada do vetor velocidade angular:

$$
{}^A_D\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\Omega_0+\Omega_1)\Omega_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -(\Omega_0+\Omega_1)\Omega_2\cos\theta_2 \\ (\Omega_0+\Omega_1)\Omega_2\sin\theta_2 & (\Omega_0+\Omega_1)\Omega_2\cos\theta_2 & 0 \end{pmatrix}
$$

Finalmente, a aceleração do ponto Q é dada por

$$
{}^A_D\mathbf{a}^Q = [{}_DT_C]{}^A_C\mathbf{a}^Q = \begin{pmatrix} -2.3\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ 2.3\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ -2.3\sin\theta_1 \end{pmatrix}
$$

Para cada par $\{\theta_1, \theta_2\}$ tem-se um resultado diferente. A figura 3 mostra como a magnitude da aceleração (m/s^2) varia em uma volta de $\{\theta_1, \theta_2\}$ tanto para o ponto p_1 quanto para o ponto p_2. As maiores acelerações são observadas no ponto p_2, como era de se esperar, pois $L > l$.

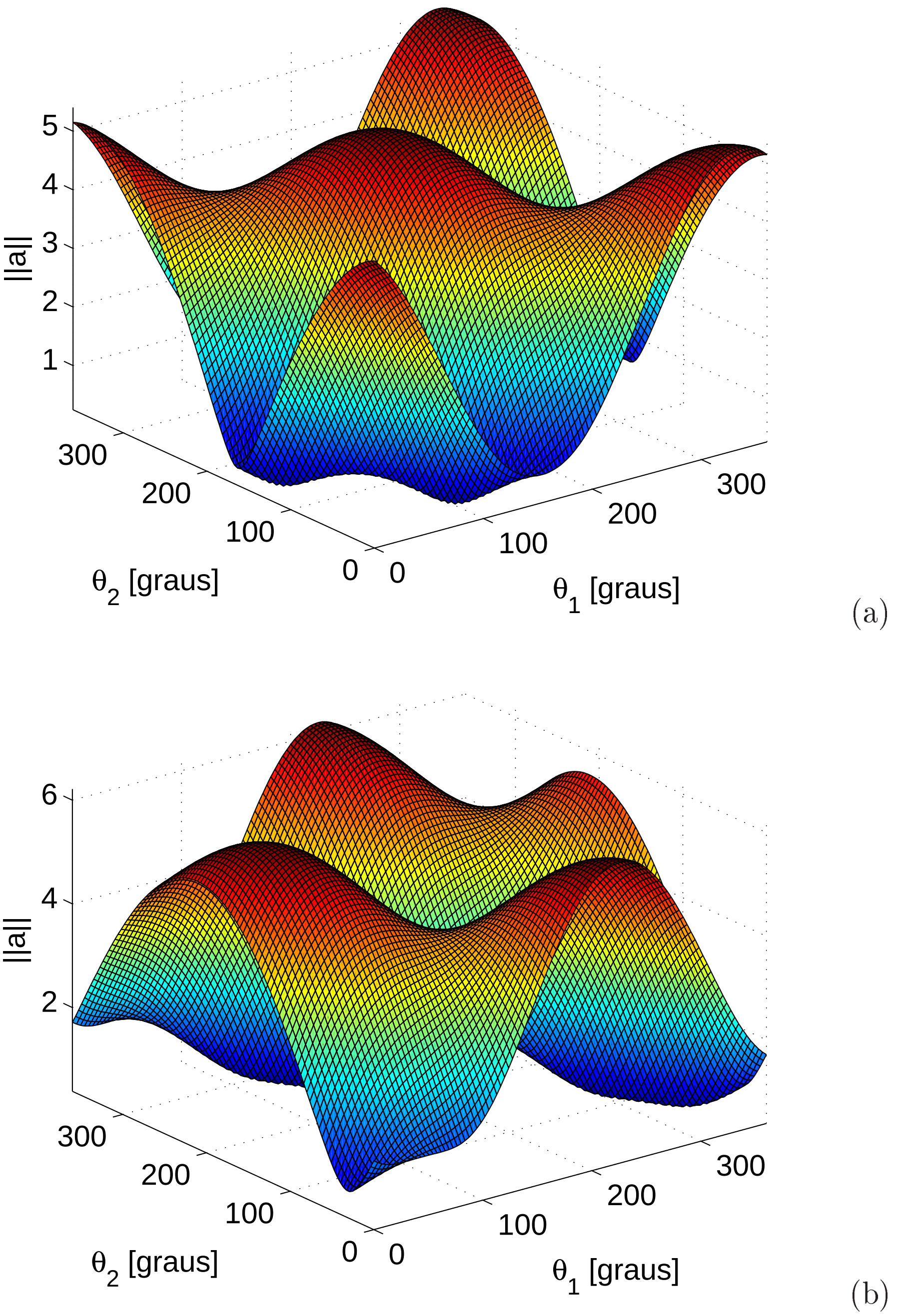

Figura 3: Caso 3. (a) aceleração p_1 e (b) aceleração p_2

4 Matlab code

```
clc
clear all
close all

% Gabarito T1 de 2015-1
```

```
%-----------------
% CASO 1 - Tudo escrito na base b1,b2,b3
theta = pi/4;
OP = 5;
PQ = 5;
L = 1;
r = 1;
l = 0.5;
RPM0 = 5;
Omega0 = RPM0/60*2*pi;
AwB = [0; Omega0; 0];
AwBtil = [0        0  Omega0
          0        0  0
          -Omega0  0  0];
rP1_0 = [OP+PQ*cos(theta)+r
        PQ*sin(theta)+l
        0];
rP2_0 = [OP+PQ*cos(theta)-r
        PQ*sin(theta)+L
        0];

aP1 = AwBtil*(AwBtil*rP1_0);


disp('CASO 1')
MagnitudeP1 = norm(aP1)

aP2 = AwBtil*(AwBtil*rP2_0);

MagnitudeP2 = norm(aP2)

clear all
%-----------------
% CASO 2 - Tudo escrito na base c1,c2,c3
theta = pi/4;
OP = 5;
PQ = 5;
L = 1;
```

```
r = 1;
l = 0.5;
RPM0 = 5;
Omega0 = RPM0/60*2*pi;
RPM1 = 10;
Omega1 = RPM1/60*2*pi;

AwB = [0; Omega0; 0];
AwBtil = [0        0  Omega0
          0        0  0
      -Omega0  0  0];

AwC = [0; Omega0+Omega1; 0];
AwCtil = [0        0  Omega0+Omega1
          0        0  0
          -(Omega0+Omega1)  0  0];
rPQ_0 = [OP+PQ*cos(theta)
        PQ*sin(theta)
        0];
aQ=AwBtil*(AwBtil*rPQ_0);

nn=200;
l_o1=linspace(0,4*pi,nn);
for i=1:nn
    o1=l_o1(i);

    bTc = [cos(o1) 0  sin(o1)
           0       1  0
          -sin(o1) 0   cos(o1)];
    cTb = [cos(o1) 0  -sin(o1)
           0       1  0
          sin(o1) 0   cos(o1)];

    aQ = cTb*AwBtil*(AwBtil*rPQ_0);
    rP1_Q = [r;l;0];
    rP2_Q = [-r;L;0];

    aP1 = aQ + AwCtil*(AwCtil*rP1_Q);
```

```
    MagnitudeP1(i) = norm(aP1);

    aP2 = aQ + AwCtil*(AwCtil*rP2_Q);

    MagnitudeP2(i) = norm(aP2);
end

disp('CASO 2')
MagnitudeP1Max = max(MagnitudeP1)

MagnitudeP2Max = max(MagnitudeP2)

figure
axes('fontsize',14)
plot(l_o1*180/pi,MagnitudeP1,l_o1*180/pi,MagnitudeP2,'linewidth',2)
xlabel('\theta_1 [graus]','fontsize',14)
ylabel('||a||','fontsize',14)
legend('p_1','p_2')
grid on
axis tight


clear all
%-----------------
% CASO 3 - Tudo escrito na base d1,d2,d3
theta = pi/4;
OP = 5;
PQ = 5;
L = 1;
r = 1;
l = 0.5;
RPM0 = 5;
Omega0 = RPM0/60*2*pi;
RPM1 = 10;
Omega1 = RPM1/60*2*pi;
RPM2 = 5;
Omega2 = RPM2/60*2*pi;

AwB = [0; Omega0; 0];
```

```
AwBtil = [0         0  Omega0
          0         0  0
      -Omega0  0  0];

AwC = [0; Omega0+Omega1; 0];
AwCtil = [0         0  Omega0+Omega1
          0         0  0
          -(Omega0+Omega1)  0  0];

rPQ_0 = [OP+PQ*cos(theta)
        PQ*sin(theta)
        0];

nn=100;
l_o1=linspace(0,2*pi,nn);
l_o2=linspace(0,2*pi,nn);
for i=1:nn
    for j=1:nn
        o1=l_o1(i);
        o2=l_o2(j);

        cTb = [cos(o1) 0  -sin(o1)
               0       1  0
              sin(o1) 0   cos(o1)];

        dTc = [cos(o2) sin(o2) 0
               -sin(o2) cos(o2) 0
                0       0        1];

        AwDtil = [0         -Omega2  (Omega0+Omega1)*cos(o2)
                 Omega2         0  -(Omega0+Omega1)*sin(o2)
                -(Omega0+Omega1)*cos(o2)  (Omega0+Omega1)*sin(o2)  0];

        AalfaDtil = [0         0  -(Omega0+Omega1)*Omega2*sin(o2)
                     0         0  -(Omega0+Omega1)*Omega2*cos(o2)
                (Omega0+Omega1)*Omega2*sin(o2)  (Omega0+Omega1)*Omega2*cos
```

```
        aQ = dTc*cTb*AwBtil*(AwBtil*rPQ_0);
        rP1_Q = [r;l;0];
        rP2_Q = [-r;L;0];

        aP1 = aQ + AwDtil*(AwDtil*rP1_Q) + AalfaDtil*rP1_Q;

        MagnitudeP1(i,j) = norm(aP1);

        aP2 = aQ + AwDtil*(AwDtil*rP2_Q) + AalfaDtil*rP2_Q;

        MagnitudeP2(i,j) = norm(aP2);

    end
end

disp('CASO 3')
MagnitudeP1Max = max(max(MagnitudeP1))

MagnitudeP2Max = max(max(MagnitudeP2))

figure
axes('fontsize',14)
surf(l_o1*180/pi,l_o2*180/pi,MagnitudeP1)
xlabel('\theta_1 [graus]','fontsize',14)
ylabel('\theta_2 [graus]','fontsize',14)
zlabel('||a||','fontsize',14)
axis tight

figure
axes('fontsize',14)
surf(l_o1*180/pi,l_o2*180/pi,MagnitudeP2)
xlabel('\theta_1 [graus]','fontsize',14)
ylabel('\theta_2 [graus]','fontsize',14)
zlabel('||a||','fontsize',14)
axis tight
```