Prof. Thiago Ritto

A Fig. 1 ilustra um avião da esquadrilha da fumaça fazendo um *loop*. O centro de massa C do avião faz um círculo de raio 100m, e o avião completa uma volta em relação ao eixo $\mathbf{b}_3$. As dimensões são dadas na figura e a velocidade tangencial do centro de massa do avião se mantém constante 350 km/h. Sabe-se que um piloto não resiste mais do que alguns minutos a uma aceleração de 10g (100 m/s^2), portanto ele é obrigado a ejetar se a sua aceleração chega nesse patamar. (a) calcule a aceleração máxima que o piloto vai sofrer fazendo o *loop* mostrado, (b) sugira (liste) algumas modificações em relação a situação apresentada que possa diminuir a aceleração do piloto. Finalmente, (c) se fosse possível fazer um *loop* com o mesmo movimento do centro de massa, mas agora com dois giros do avião: uma volta em relação ao eixo $\mathbf{b}_3$ e também uma volta em relação ao eixo $\mathbf{c}_2$, qual seria a aceleração máxima do piloto nessa situação hipotética?

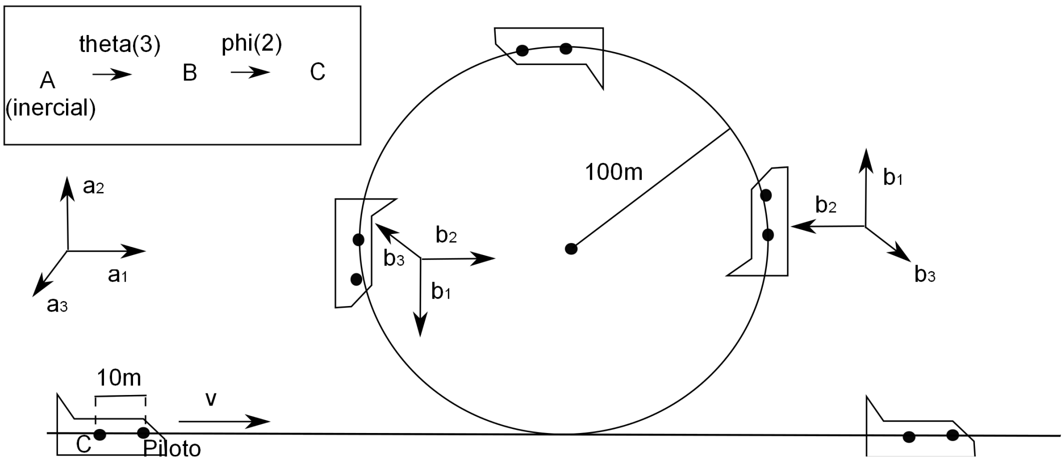


Figura 1: Avião fazendo um *loop*.

Matrizes de transformação

$$[_AT_B] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ [_BT_C] = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

a) A aceleração do ponto P (piloto) em relação referencial A pode ser escrita como

$$^A\mathbf{a}^P = ^A\mathbf{a}^C + ^A\boldsymbol{\omega}^B \times (^A\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{r}^{P/C}). \tag{1}$$

Observe que a velocidade tangencial v do centro de massa do avião C é contante (350km/h), logo $v = \omega R$, onde $R = 100$m. Temos também $\dot{\theta} = \dot{\phi} = \omega$. Se $r = 10$m, os termos da equação acima são dados por

${}^A\mathbf{a}^C = w^2 R\mathbf{b}_2$, ${}^A\boldsymbol{\omega}^B = \dot{\theta}\mathbf{b}_3$, $\mathbf{r}^{P/C} = r\mathbf{b}_1$.

Então

${}^A\mathbf{a}^P = -\dot{\theta}^2 r\mathbf{b}_1 + w^2 R\mathbf{b}_2$

O módulo da aceleração

$||{}^A\mathbf{a}^P|| = \sqrt{(\dot{\theta}^2 r)^2 + (w^2 R)^2} = \sqrt{(w^2 r)^2 + (w^2 R)^2}$

Finalmente

$||{}^A\mathbf{a}^P|| = 9.5$ g

b) Aumentar R, diminuir r, diminuir v.

c) A aceleração do ponto P (piloto) em relação referencial A pode ser escrita como

$$ {}^A\mathbf{a}^P = {}^A\mathbf{a}^C + {}^A\boldsymbol{\omega}^C \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}^{P/C}) + {}^A\boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{P/C}. \tag{2} $$

Os termos da equação acima são dados por

${}^A\mathbf{a}^C = w^2 R\mathbf{b}_2 = w^2 R\mathbf{c}_2$, ${}^A\boldsymbol{\omega}^C = \dot{\theta}\mathbf{b}_3 + \dot{\phi}\mathbf{c}_2$, $\mathbf{r}^{P/C} = r\mathbf{c}_1$,

${}^A\boldsymbol{\omega}^C = [{}_C T_B]\dot{\theta}\mathbf{b}_3 + \dot{\phi}\mathbf{c}_2 = -\dot{\theta}\sin\phi\mathbf{c}_1 + \dot{\phi}\mathbf{c}_2 + \dot{\theta}\cos\phi\mathbf{c}_3$

${}^A\boldsymbol{\alpha}^C = -\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\mathbf{c}_1 - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi\mathbf{c}_3$

$$ {}^A\boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{P/C} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \\ -\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} = -r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi\mathbf{c}_2 $$

$$ {}^A\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}^{P/C} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\cos\phi \end{pmatrix} = r\dot{\theta}\cos\phi\mathbf{c}_2 - r\dot{\phi}\mathbf{c}_3 $$

$$ {}^A\boldsymbol{\omega}^C \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}^{P/C}) = -\begin{pmatrix} 0 & r\dot{\phi} & r\dot{\theta}\cos\phi \\ -r\dot{\phi} & 0 & 0 \\ -r\dot{\theta}\cos\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\cos\phi \end{pmatrix} = $$

$$ = (-r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\cos^2\phi)\mathbf{c}_1 - r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\mathbf{c}_2 - r\dot{\theta}^2\cos\phi\sin\phi\mathbf{c}_3 = $$

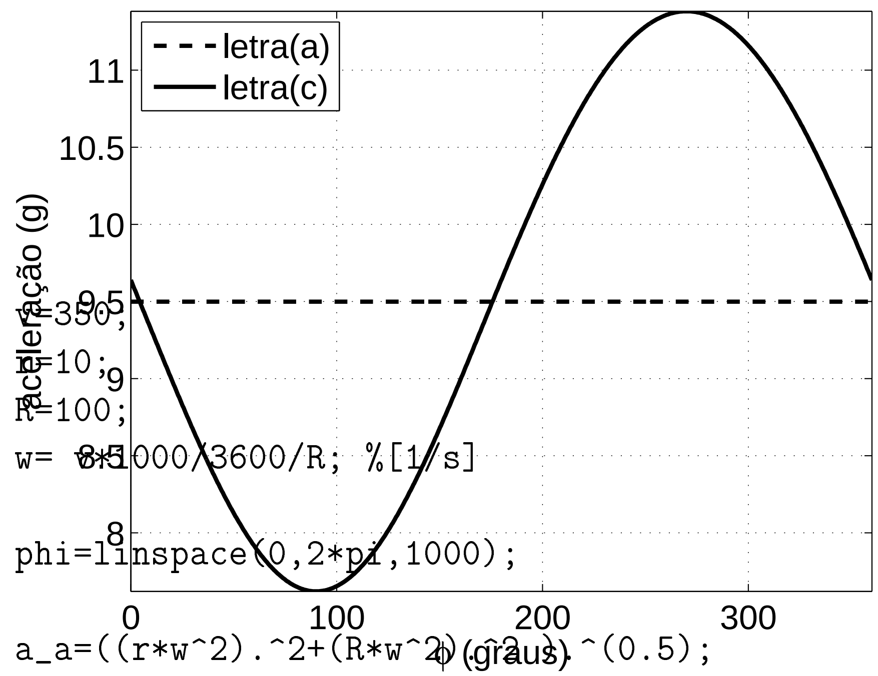
$$ = (-r\omega^2 - r\omega^2\cos^2\phi)\mathbf{c}_1 - r\omega^2\sin\phi\mathbf{c}_2 - r\omega^2\cos\phi\sin\phi\mathbf{c}_3 $$

Logo

$${}^{A}\mathbf{a}^{C} = (-r\omega^2 - r\omega^2\cos^2\phi)\mathbf{c}_1 + (-r\omega^2\sin\phi + w^2R - r\omega^2\sin\phi)\mathbf{c}_2 - r\omega^2\cos\phi\sin\phi\mathbf{c}_3$$

$$||{}^{A}\mathbf{a}^{P}|| = \sqrt{(-r\omega^2 - r\omega^2\cos^2\phi)^2 + (w^2R - 2r\omega^2\sin\phi)^2 + (-r\omega^2\cos\phi\sin\phi)^2}$$

O gráfico abaixo mostra o valor do módulo da aceleração para $\phi \in [0, 2\pi]$.




```
v=350;
r=10;
R=100;
w= v*1000/3600/R; %[1/s]

phi=linspace(0,2*pi,1000);

a_a=((r*w^2).^2+(R*w^2).^2).^(0.5);
a_c=((-r*w^2*cos(phi).^2 - r*w^2).^2+...
    (R*w^2-2*r*w^2*sin(phi)).^2 +...
    (r*w^2*cos(phi).*sin(phi)).^2).^(0.5);

figure
axes('fontsize',16)
plot(phi*180/pi,a_a/10*ones(length(phi),1),'--k','linewidth',2)
hold on
```

```
plot(phi*180/pi,a_c/10,'k','linewidth',2)
xlabel('\phi (graus)','fontsize',16)
ylabel('aceleração (g)','fontsize',16)
grid on
legend('letra(a)','letra(c)',2)
axis tight
```