Dinâmica de um pêndulo simples, fixado a uma massa que se move

Prof. Thiago Ritto

tritto@mecanica.ufrj.br
Dinâmica 2, Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ

1 Referenciais e bases

Considere o sistema mostrado na Fig. 1. Os referenciais considerados nesta análise são: A (inercial) e B (solidário à barra). A base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ é solidária ao referencial A e a base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ é solidária ao referencial B.

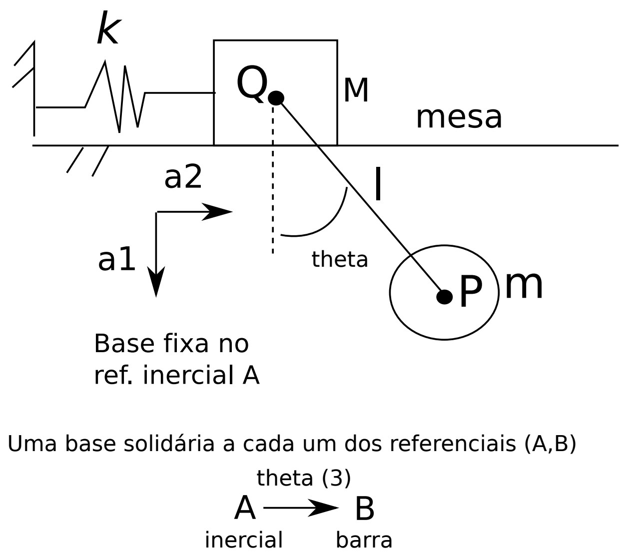

Figura 1: Ilustração do sistema analisado.

2 Matrizes de transformação

A matriz de transformação $[_AT_B]$ transforma um vetor escrito na base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ para a base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

$$[_AT_B] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

3 Hipóteses simplificadores

Os corpos são tratados como partículas, logo temos um sistema com 2 partículas, uma com massa M e outra com massa m. A barra de comprimento l tem massa desprezível. Considera-se que o vínculo no ponto O é um pino, e que não há atrito, ou seja, o torque de reação em O é zero. Também não há atrito entre a mesa o corpo de massa M.

4 Cinemática

As velocidades das partículas, localizadas nos pontos P e Q, são dadas por:

$$ {}^{A}\mathbf{v}^{Q} = \dot{y}\mathbf{a}_2 \,, \tag{2} $$

onde $y = 0$ corresponde à posição da mola em repouso.

$$ {}^{A}\mathbf{v}^{P} = {}^{A}\mathbf{v}^{Q} + {}^{A}\boldsymbol{\omega}^{B} \times \mathbf{r}^{P/Q} \,, \tag{3} $$

onde ${}^{A}\boldsymbol{\omega}^{B} = \dot{\theta}\mathbf{b}_3$ e $\mathbf{r}^{P/Q} = l\mathbf{b}_1$. Logo,

$$ {}^{A}\mathbf{v}^{P} = -\dot{\theta} l \sin\theta \mathbf{a}_1 + (\dot{y} + \dot{\theta} l \cos\theta)\mathbf{a}_2 \,, \tag{4} $$

e

$$ ||{}^{A}\mathbf{v}^{Q}||^2 = \dot{y}^2 \,, \tag{5} $$

$$ ||{}^{A}\mathbf{v}^{P}||^2 = \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2\theta + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2\theta + 2\dot{y}\dot{\theta} l \cos\theta \,, \tag{6} $$

A última expressão pode ser simplificada ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$):

$$ ||{}^{A}\mathbf{v}^{P}||^2 = \dot{\theta}^2 l^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{\theta} l \cos\theta \,. \tag{7} $$

5 Equações de movimento - Lagrange

Equações de Lagrange, considerando as coordenadas generalizadas y e θ:

$$ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = Q_y \,, \tag{8} $$

$$ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \,, \tag{9} $$

onde $L = K - \Phi$. Como as forças que realizam trabalho estão ligadas aos termos de Lagrange, $Q_y = Q_\theta = 0$.

Definindo a linha horizontal que passa pelo ponto Q, como nível zero de energia potencial gravitacional, tem-se:

$$\Phi = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}ky^2\,. \tag{10}$$

A energia cinética pode ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2}M||^A\mathbf{v}^Q||^2 + \frac{1}{2}m||^A\mathbf{v}^P||^2\,, \tag{11}$$

ou seja,

$$K = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2l^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{\theta}l\cos\theta)\,. \tag{12}$$

Calculando cada termo das equações de Lagrange:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} + m\dot{y} + ml\dot{\theta}\cos\theta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + m\dot{y}l\cos\theta \\
\frac{\partial L}{\partial y} = -ky \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{y}l\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = M\ddot{y} + m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{y}l\cos\theta - m\dot{y}l\dot{\theta}\sin\theta
\end{gathered} \tag{13}$$

Juntando os termos, as equações de movimento do sistema fica:

$$\begin{gathered}
(M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + ky = 0 \\
ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{y}l\cos\theta + mgl\sin\theta = 0\,,
\end{gathered} \tag{14}$$

Para θ pequeno ($\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$), chega-se no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{gathered}
(M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\theta + ky = 0 \\
ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{y}l + mgl\theta = 0\,.
\end{gathered} \tag{15}$$