Prova de Álgebra Linear (31/07/2013)
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema, depois faça as contas.

1) (2,0) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mostrada abaixo. (a) Obtenha Σ e V da decomposição $A = U\Sigma V^T$. (b) Os valores singulares mudam se a primeira linha de A for trocada com a quarta? Justifique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) (2,0) Deseja-se refletir $v = (1,1,1)$ em torno de um plano para obter um vetor alinhado a $w = (1,1,0)$. Obtenha (a) o vetor unitário ortogonal a esse plano e (b) a matrix de reflexão que faz esse mapeamento.

3) (2,0) Seja $Ax \neq b$. Obtenha uma aproximação para x usando a decomposição QR.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4) (2,0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz A mostrada abaixo. Pede-se (a) a dimensão da imagem, a dimensão do núcleo e o tipo de transformação (injetora, etc.), (b) uma base para o núcleo de A. (c) Verifique se $Im(A^T)$ é complemento ortogonal de $kr(A)$ em $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) (2,0) (a) Se $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é um operador autoadjunto, pode-se afirmar que $kr(A - \lambda_1 I) \bigoplus kr(A - \lambda_2 I) \bigoplus kr(A - \lambda_3 I) = \mathbb{R}^3$, onde λ's são os autovalores de A? Justifique. (b) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica, existe uma base que gere uma matriz similar à A que seja diagonal? Justifique. (c) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\{w_1, w_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, que subespaço é gerado por $v_i \otimes w_j$ ($i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$)?