Prova de Álgebra Linear
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema. Depois faça as contas.

1) (3,0 pontos) Faça uma parte da decomposiçao em valores singulares ($A = U\Sigma V^T$) da matriz A. Encontre U e Σ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) (1,0 ponto) Calcule uma base para a imagem de A e uma base para o núcleo de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3) (1,0 ponto) Dada a base {(1,1,1),(1,2,3)}, use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal.

4) (2,0 ponto) Sejam três operadores A, B e C ($T : V \to V$). (a) Podemos afirmar que a dimensão do núcleo de BC é maior do que a dimensão do núcleo de ABC? Justifique. (b) Se $V = \mathbb{R}^{10}$ e A tem dois autovetores associados ao autovalor zero, qual é a dimensão da imagem de A? (c) Se Q é uma matriz ortogonal e A é uma matriz simétrica, podemos afirmar que $D = Q^{-1}AQ$ é simétrica? Justifique.

5) (3,0 pontos) Diga que vetor, $b_1 = (1, 10, 1)$ ou $b_2 = (10, -1, 1)$, está mais próximo (no sentido dos mínimos quadrados) do subespaço gerado pelas colunas da matriz A do exercício 1.