10/07/2013 - P~~2~~F DIN2 - Prof. Thiago Ritto

* Considere todos os pedidos no referencial inercial.

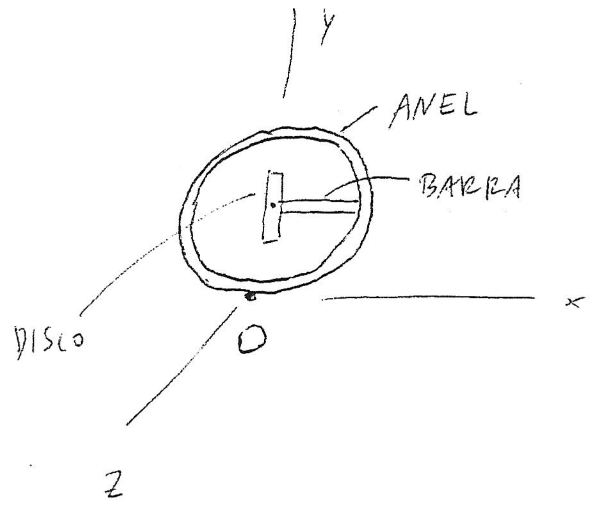
1) (2,0) A Fig. 1 mostra um sistema formado por um anel de massa m_a e raio R, uma barra de massa m_b e comprimento R e um disco de massa m_d e raio r, todos soldados. Calcule o momento de inércia I_{zz} e o produto de inércia I_{xy} do sistema em relação ao ponto O.

(2,0) A entrada de uma tubulação de área A_1 recebe água a um fluxo constante m' como mostra a Fig. 2. A água sai por uma área $A_2 = A_1/2$ com ângulo de saída θ. Considerando regime permanente, (a) calcule a velocidade de saída da água; (b) calcule a força necessária no flange para que a estrutura não se movimente; (c) calcule o momento no flange em relação ao ponto O.

(2,5) Considere os referenciais: A inercial, B gira $\alpha\mathbf{a}_1$ em relação a A, C gira $\beta\mathbf{b}_1$ em relação a B e D gira $\gamma\mathbf{c}_1$ em relação à C, sendo D fixo no corpo. Esse corpo é lançado ao ar com $\mathbf{H} = H\mathbf{a}_3$, sendo $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ uma base fixa em A. (a) Escreva o resultado de $[I^c]\boldsymbol{\omega}$ no referencial inercial, usando uma base fixa em D, e sabendo que na base D o tensor de inércia é diagonal com I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} conhecidos. (b) Escreva as 3 equações obtidas pela relação $\mathbf{M}^c = d(\mathbf{H}^c)dt$, sendo c o centro de massa do corpo.

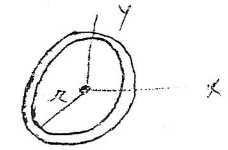
(3,5) Considere o sistema mostrado na Fig. 3: um anel de massa desprezível, uma barra de massa desprezível e um disco de massa m e raio r. A barra está soldada no anel, mas o disco pode girar livremente em torno do seu eixo de simetria. O anel rola sem deslizar em um plano inclinado, mas pode girar livremente na direção $\mathbf{n}$ normal ao plano inclinado. O disco gira com velocidade constante ω_o em torno do seu eixo de simetria. (a) Desenhe o diagrama de corpo livre do sistema. (b) Dada a posição mostrada na figura, o sistema vai girar para a direita ou esquerda; justifique. (c) Calcule o vetor velocidade angular do disco e o $\mathbf{H}$ do sistema em relação ao ponto de contato. (d) escreva as equações de movimento para os momentos ($\mathbf{M} = d\mathbf{H}/dt$). Considere os referenciais: A e B inerciais, C gira $\phi\mathbf{b}_2$ em relacao a B, D gira $\theta\mathbf{c}_1$ em relação a C e E gira $\psi\mathbf{d}_3$ em relação à D, sendo E fixo no disco.

FIGURA 1



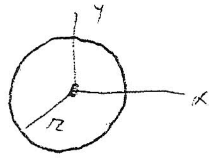
TABELA

ANEL



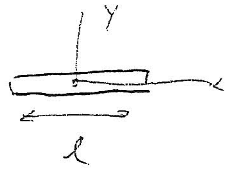
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} m r^2$$
$$I_{zz} = m r^2$$

DISCO



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2$$
$$I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$$

BARRA



$$I_{xx} = 0$$
$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} m l^2$$

FIGURA 2

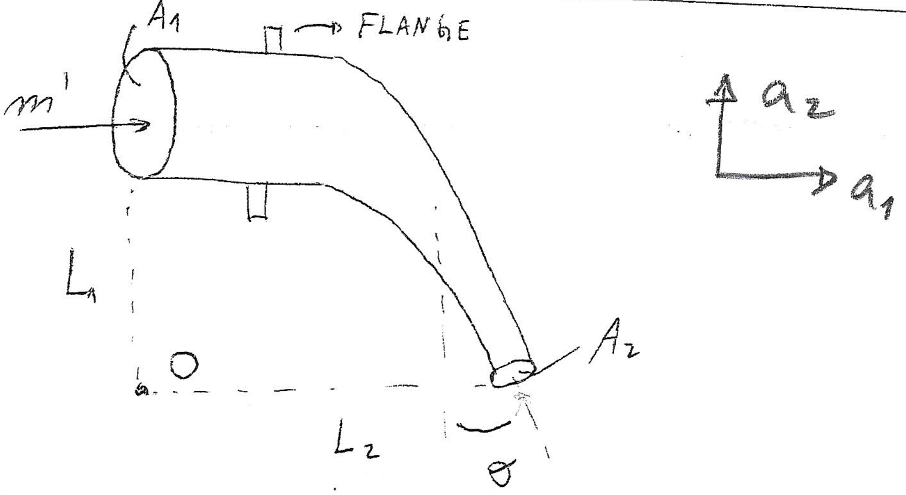
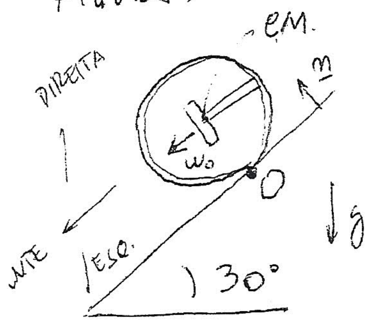
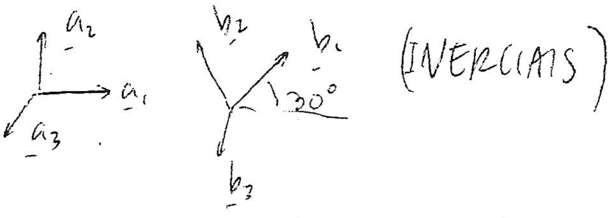


FIGURA 3





$$B \xrightarrow{\phi(2)} C \xrightarrow{\theta(1)} D \xrightarrow{\psi(3)} E$$

(INERCIAL) (DISCO)

PF - 2013.1

1) $I_{33}^{a} = m_a R^2 + m_a R^2$ $\qquad I_{33}^{\beta} = \frac{1}{12} m_b R^2 + m_b \left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)$

$I_{33}^{D} = \frac{1}{4} m_d r^2 + m_d R$ $\qquad I_{33} = I_{33}^{a} + I_{33}^{D} + I_{33}^{\beta}$

$$I_{xy} = \cancel{I_{xy}^{a}} \to 0 + \cancel{I_{xy}^{D}} \to 0 + I_{xy}^{\beta} = -m_b R \times \frac{R}{2} = m_b \frac{R^2}{2}$$

2) a) $m'_e = m'_s \Rightarrow \rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 \Rightarrow A_1 V_1 = \frac{A_1}{2} V_2$

$V_2 = 2 V_1$

b) $\underline{V}_2 = -2 v_1 \cos\theta \, \underline{a}_2 + 2 v_1 \operatorname{sen}\theta \, \underline{a}_1$

$\underline{F}' = m' (\underline{v}_2 - v_1) \Rightarrow$ $\qquad \underline{F} = m \begin{pmatrix} 2 v_1 \operatorname{sen}\theta - v_1 \\ -2 v_1 \cos\theta \end{pmatrix}$ no fluido!

$\underline{F}_f = -\underline{F}$ do fluido no flange $\Rightarrow \underline{R} = \underline{F}$

c) $M = m' (\underline{r}^{2/0} \times \underline{v}_2 - \underline{r}^{1/0} \times \underline{v}_1) = (m' v_1 L_1 - m' 2 v_1 \cos\theta L_2) \underline{a}_3$

3) a) $\underline{\omega} = \dot{\alpha} \underline{b}_1 + \dot{\beta} \underline{c}_2 + \dot{\gamma} \underline{d}_3$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos\beta \cos\gamma + \dot{\beta} \operatorname{sen}\gamma \\ \dot{\beta} \cos\gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}_{\text{na base } D}$$

$[I^c] \underline{\omega} = (I_{xx}(\dot{\alpha} \cos\beta \cos\gamma + \dot{\beta} \operatorname{sen}\gamma) \underline{d}_1 + I_{yy} \dot{\beta} \cos\gamma \, \underline{d}_2 + I_{33} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \operatorname{sen}\beta) \underline{d}_3)$

b) $\underline{M}^c = \frac{d \underline{H}^c}{dt} = 0$ (movimento livre de torque)

Aplicando a Lei de Euler:

$0 = I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{33} - I_{yy}) \dot{\beta} \cos\gamma (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \operatorname{sen}\beta)$

$0 = I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{33}) (\dot{\alpha} \cos\beta \cos\gamma + \dot{\beta} \operatorname{sen}\gamma)(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \operatorname{sen}\beta)$

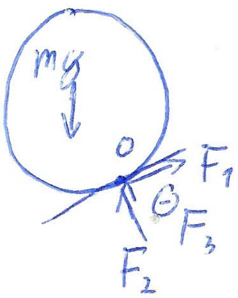
$0 = I_{33} \dot{\omega}_3 + (I_{yy} - I_{xx}) (\dot{\alpha} \cos\beta \cos\gamma + \dot{\beta} \operatorname{sen}\gamma)(\dot{\beta} \cos\gamma)$

$$\dot{\omega}_x = \ddot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma - \dot{\alpha}\dot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\gamma + \ddot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\gamma +$$
$$+ \dot{\beta}\cos\gamma\,\dot{\gamma}$$

$$\dot{\omega}_y = \ddot{\beta}\cos\gamma - \dot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\dot{\gamma}$$

$$\dot{\omega}_z = \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\beta + \dot{\beta}\dot{\alpha}\cos\beta$$

4) a)



$$\underset{\sim}{F} = F_1\,\underset{\sim}{c}_1 + F_2\,\underset{\sim}{c}_2 + F_3\,\underset{\sim}{c}_3 - mg\,\underset{\sim}{a}_2$$

$$\underset{\sim}{M}^{F/o} = \underset{\sim}{r}^{c/o} \times (-mg\,a_2), \text{ onde } \underset{\sim}{r}^{c/o} = R\,\underset{\sim}{d}_2$$

$$= \underbrace{Rmg(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\phi + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)}_{M_3^{o}}\ \underset{\sim}{d}_3$$

b) $\underset{\sim}{H}$ está em d_2

$\underset{\sim}{H} \leftarrow \underset{\sim}{M}$ Como $\underset{\sim}{H}$ persegue $\underset{\sim}{M}$, devido ao efeito giroscópico, o sistema gira para a esquerda

c) $\underset{\sim}{H}^o = [I^o]\,\underset{\sim}{\omega} \Rightarrow {}^{R}\underset{\sim}{V}^o = 0 \Leftrightarrow$ rola s/ deslizar

$$\underset{\sim}{\omega} = \dot{\theta}\,\underset{\sim}{d}_1 + \dot{\phi}\cos\theta\,\underset{\sim}{d}_2 + (\dot{\psi} - \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d_3$$

$$\underset{\sim}{H}^o = \frac{5}{4} mR^2\dot{\theta}\,\underset{\sim}{d}_1 + \frac{1}{4} mR^2\dot{\phi}\cos\theta\,d_2 + \frac{3}{2} mR^2(\dot{\psi} - \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d_3$$

d) Como $\underset{\sim}{H}^o = [I^o]\,\underset{\sim}{\omega}$ e o disco é axissimétrico:

$$\underset{\sim}{M}_1 = 0 = \frac{5}{4} mR^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2} mR^2(\dot{\psi} + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\dot{\phi}\cos\theta - \frac{1}{4} mR^2\dot{\phi}\cos\theta(-\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$M_2 = 0 = \frac{1}{4} mR^2(\ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{5}{4} mR^2\dot{\theta}(\dot{\psi} - \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{3}{2} mR^2\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$M_3 = \frac{3}{2} mR^2(\ddot{\psi} - \ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{4} mR^2\dot{\phi}^2\cos\theta\,\dot{\theta} - \frac{5}{4} mR^2\dot{\phi}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

Se $R = r$, para o cálculo do tensor de inércia.