09/07/2012 - PF DIN2 - Prof. Thiago Ritto

Considere todos os pedidos no referencial inercial.

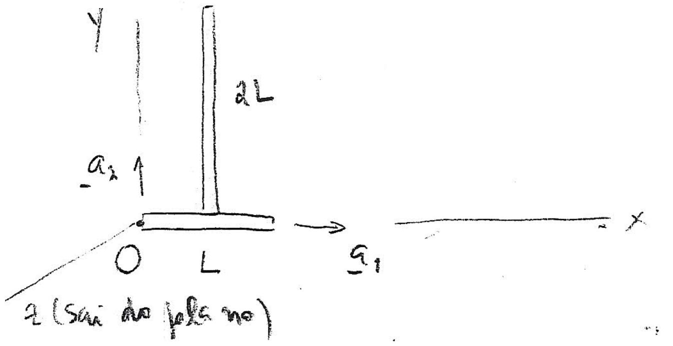
1) (1,5) O que é cone espacial? Faça um exemplo e desenhe o cone.

2) (2,5) Considere a estrutura formada por duas barras de mesma densidade, mostrada na Fig. 1. Pede-se: (a) (0,5) a posição do centro de massa da estrutura escrita na base A (solidária ao corpo) em relação ao ponto O, (b) (0,5) As componentes I_{xy} e I_{zz} do tensor de inércia. Seja uma força de impacto (ver desenho) aplicada no ponto O na direção de $\mathbf{a}_1$ quando a estrutura está se movimentando com velocidade v na direção de $\mathbf{a}_1$, (c) (0,75) qual é a velocidade do centro de massa depois do impacto? (d) (0,75) qual é a velocidade angular da estrutura se inicialmente ela não está girando?

3) (4,5) Considere o mecanismo mostrado na Fig. 2, onde um eixo gira com velocidade Ω constante, uma barra está pinada no ponto O e pode se mover θ em relação ao eixo, e um disco na ponta da barra pode girar um ângulo φ em relação à barra. A base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ é solidária ao eixo e a base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ é solidária à barra. Pede-se: (a) (1,0) a aceleração do centro de massa da barra na base B, (b) (0,5) o vetor velocidade angular do disco na base B, (c) (1,0) os diagramas de corpo livre da barra e do disco, (c) (0,5) As 3 equações da Lei de Newton para a barra, (d) (1,5) As 3 equações da Lei de Euler para o disco.

4) (1,5) Considere o satélite sem torque externo aplicado, representado por um cilindro, mostrado na Fig. 3. Se a velocidade de precessão $\dot{\phi}$, o ângulo de nutação θ, e o tensor de inércia diagonal (I, I, I_z) são conhecidos. (a) (0,5) escreva o vetor quantidade de movimento angular $\mathbf{H}$ em função desses dados na base solidária ao corpo, (b) (0,25) escreva o valor do giro spin em função desses dados, (c) (0,75) escreva o vetor aceleração angular do corpo na base C. Obs. A base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ não está solidária ao corpo, ela está posicionada na direção do corpo mas não realiza o giro spin φ.

FIGURA 1



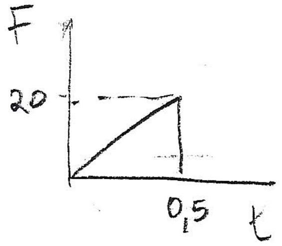
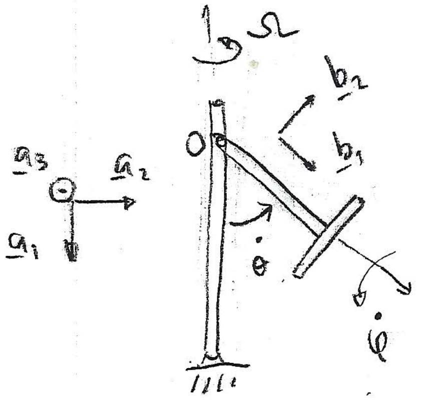
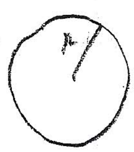


FIGURA 2



BARRA, massa m



DISCO, massa m

FIGURA 3

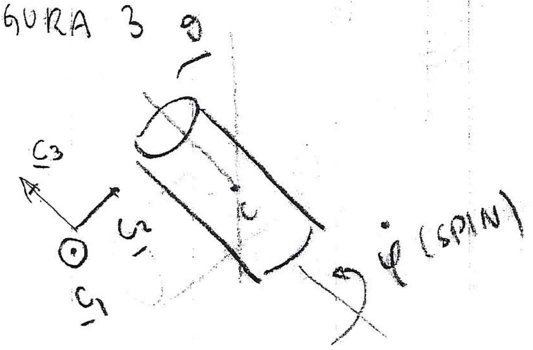
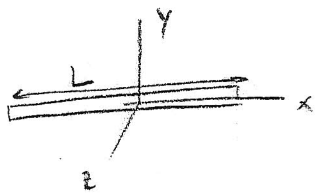


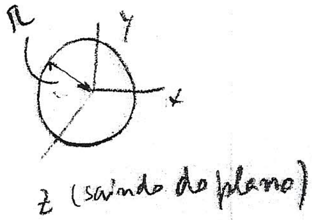
TABELA : BARRA



$$I_x = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} m L^2$$

DISCO



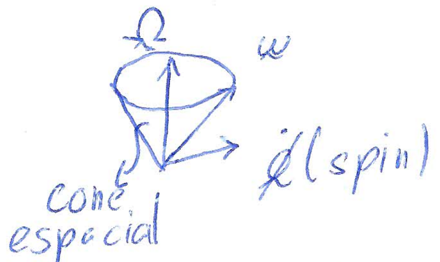
$$I_x = I_y = \frac{1}{4} m r^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

PF. 2012.2

1) É o cone formado pela rotação do vetor velocidade angular (ω) ao redor do vetor velocidade de precessão (Ω)



2) a) $x_{CM} = \dfrac{m_1 \frac{L}{2} + m_2 \frac{L}{2}}{m_1 + m_2} = \dfrac{L}{2}$

$y_{CM} = \dfrac{m_1 \times 0 + m_2 L}{m_1 + m_2}$; $2m_1 = m_2$

$= \dfrac{m_2 L}{3 m_2} = \dfrac{L}{3}$

b) $I^S_{xy} = \cancel{I^1_{xy}} + \cancel{I^2_{xy}} = -m_2 \dfrac{L^2}{2}$

$0 - 0 \qquad 0 - m_2\left(\dfrac{L}{2} \times L\right)$

$I^S_{33} = I^1_{33} + I^2_{33}$

$I^S_{33} = \dfrac{1}{12} m L^2 + m \dfrac{L^2}{4} + \dfrac{1}{12} m\, 4L^2 + m\left(L^2 + \dfrac{L^2}{4}\right)$

$= mL^2\left(\dfrac{1}{12} + \dfrac{3}{12} + \dfrac{4}{12} + \dfrac{12}{12} + \dfrac{3}{12}\right)$

$= \dfrac{23}{12} mL^2$

c) $I = \Delta G = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F\, dt$

$(m_1 + m_2)\, {}^R V_1^{CM} = \dfrac{\overset{10}{\cancel{20 \times 0{,}5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$

$V_1 = \dfrac{5}{m_1 + m_2}$

OBS: vale lembrar que $m_2 = 2L\rho$ e $m_1 = L\rho$, onde ρ é uma densidade linear.

d) $\Delta H = I^{ANG} = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} r \times F\, dt = -\dfrac{L}{2} \times \dfrac{20 \times 0{,}5}{2}\, \hat{z}$

$\Delta H = H_2 - \underset{0}{\cancel{H_1}}$ $\qquad I_{33}\, \omega = -\dfrac{L}{2} \times 5\, \hat{z} \Rightarrow \omega = \dfrac{-6 \times 5}{23} L\, \hat{z}$

3) a) $p^{CM/O} = L\, b_1$ $\qquad \omega = (-\Omega \cos\theta, \Omega \sin\theta, \dot{\theta})$ base b

${}^R v^{CM} = L \dfrac{{}^R d b_1}{dt} = L\, \omega \times b_1$

$= -L\Omega \sin\theta\, b_3 + L\dot{\theta}\, b_2$

${}^R a^{CM} = -L\Omega\dot{\theta}\cos\theta\, b_3 - L\Omega^2 \sin\theta\cos\theta\, b_2 - L\Omega^2 \sin^2\theta\, b_1 + L\ddot{\theta}\, b_2 +$

$- L\dot{\theta}\Omega\cos\theta\, b_3 - L\dot{\theta}^2\, b_1$

b) $\underset{\sim}{\omega} = (\dot{\varphi} - \Omega\cos\theta, \Omega\,\mathrm{sen}\,\theta, \dot{\theta})_{\text{base } b}$

c) $\underset{\sim}{F} = -F_1\underset{\sim}{b}_1 + F_2\underset{\sim}{b}_2 + F_3\underset{\sim}{b}_3 + mg\cos\theta\,\underset{\sim}{b}_1 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{b}_2$

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a} \Rightarrow \quad mg\cos\theta - F_1 = mL(-\dot{\theta}^2 - \Omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta)$

$F_2 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = mL(\ddot{\theta} - \Omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)$

$F_3 = mL(-\Omega\dot{\theta}\cos\theta - \Omega\dot{\theta}\cos\theta) = -2mL\Omega\dot{\theta}\cos\theta$

d) $\underset{\sim}{M}^{E_0} = L\,\underset{\sim}{b}_1 \times (mg\cos\theta\,\underset{\sim}{b}_1 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{b}_2) + M_1\underset{\sim}{b}_1 + M_2\underset{\sim}{b}_2 + M_3\underset{\sim}{b}_3$

$= -mgL\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{b}_3 + M_1\underset{\sim}{b}_1 + M_2\underset{\sim}{b}_2 + M_3 b_1$

$M_1 = I_{xx}(\ddot{\varphi} + \Omega\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \cancel{I_{zz}\dot{\theta}\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta - I_{yy}\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}}$

$M_2 = I_{yy}(\Omega\dot{\theta}\cos\theta) + I_{xx}(\dot{\varphi} - \Omega\cos\theta)\dot{\theta} - I_{zz}\dot{\theta}(-\Omega\cos\theta)$

$M_3 - mgL\cos\theta = I_{zz}\ddot{\theta} + I_{yy}(\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta)(-\Omega\cos\theta) - I_{xx}(\dot{\varphi} - \Omega\cos\theta)(\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + 0 \quad \Big| \quad I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + mL^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4} = I_{zz}$

$M_1 = I_{xx}(\ddot{\varphi} + \Omega\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$M_2 = 2I_{yy}\Omega\dot{\theta}\cos\theta + I_{xx}(\dot{\varphi} - \Omega\cos\theta)\dot{\theta}$

$M_3 - mgL\cos\theta = I_{yy}(\ddot{\theta} - \Omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + I_{xx}(\Omega\cos\theta - \dot{\varphi})(\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta)$

4) a) $\underset{\sim}{\omega} = (0, \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta, \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \Rightarrow H = [I]\underset{\sim}{\omega}$

$\underset{\sim}{H} = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{c}_2 + I_{zz}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi})\underset{\sim}{c}_3$

$\dot{\underset{\sim}{H}} = \underset{\sim}{M} = 0$

$\dot{H} = I\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{c}_2 + I_{zz}(\ddot{\phi}\cos\theta + \ddot{\varphi})\underset{\sim}{c}_3 - I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\phi}\cos\theta\,\underset{\sim}{c}_1 + I_{zz}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi})(\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)c_1$

$I_{zz}(\ddot{\phi}\cos\theta + \ddot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\ddot{\phi}\cos\theta$

$I\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = I_{zz}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi})(\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)$