19/11/2014 - P2 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

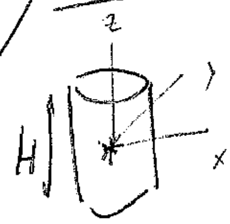
1) (2,0) Considere o cone espacial mostrado na Fig. 1. Desenhe: (a) o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, (b) o vetor velocidade de precessão $\dot{\phi}$, (c) o vetor velocidade *spin* $\dot{\psi}$ (escolha direção e sentido), (d) ângulo de nutação θ, e (e) o cone do corpo.

2) (6,0) Em 2014, pela primeira vez na história, em uma missão da Agência Espacial Européia, um robô pousa em um cometa. A nave Rosetta viajou 6 milhões de quilômetros durante dez anos para chegar ao cometa 67-P, onde o módulo Philae fez o pouso. A Fig. 3 mostra uma simplificação deste problema: um cilindo de massa m, comprimento $2L$ e raio r, apoiado em um sistema de 4 barras no cometa, que viaja com velocidade constante $v\mathbf{a}_1$. Considere 5 graus de liberdade, sendo 3 da posição do ponto O (x, y, z), e 2 ângulos (α,β). O efeito das 4 barras é modelado como molas lineares com pequenos deslocamentos/ângulos: se o ponto O se desloca $x\mathbf{a}_1$, há uma força de reação $-kx\mathbf{a}_1$, se o cilindro se movimenta $\alpha\mathbf{a}_1$ há um torque de reação $-k_t\alpha\mathbf{a}_1$, e assim por diante. Pede-se, em função dos graus de liberdade, da geometria e do material, (a) o diagrama de corpo livre do cilindro, explicitando os vetores de força e de momento na base escolhida, (b) o vetor velocidade angular do cilindro, (c) o vetor aceleração angular do cilindro, (d) as 3 equações da lei de Euler, e (e) a aceleração do centro de massa. Obs. o referencial inercial A é o próprio cometa que viaja com velocidade constante e aceleração zero, o referencial B gira α na direção de $\mathbf{a}_1$ com plano $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ alinhado com a base do cilindro e o referencial C (cilindro) gira β na direção de $\mathbf{b}_2$ com plano $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ alinhado com a base do cilindro.

3) (2,0) Considere a corrente com densidade linear ρ mostrada na Fig. 3, inicialmente em repouso no solo. A corrente é puxada de tal maneira que os pontos A e B se deslocam simetricamente em sentidos opostos na direção de $\mathbf{a}_1$. O sistema principal de interesse é a parte da corrente que sai do solo. A velocidade do centro de massa desse sistema principla é igual a $\dot{y}\mathbf{a}_2$ (que pode variar). Pede-se, em função de x, y e ρ, (a) a massa do sistema principal, (b) a massa do sistema secundário (a corrente que está no solo), (c) a força da gravidade atuando no sistema principal, e (d) a força resultante na direção $\mathbf{a}_2$ que torna o movimento possível.

FIGURA 1

TABELA

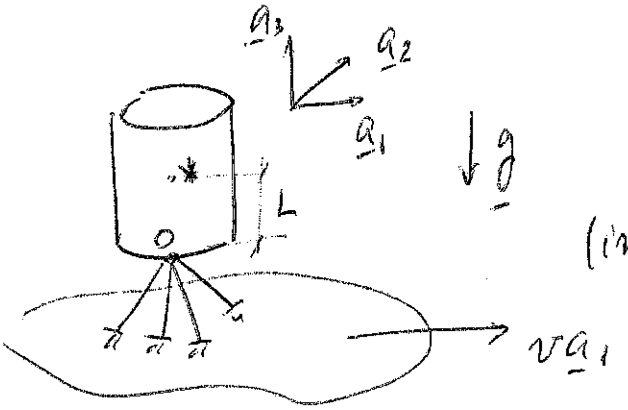


$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m \left(3r^2 + H^2\right)$$

FIGURA 2



$$A \xrightarrow{\alpha(1)} B \xrightarrow{\beta(2)} C$$

(inercial) (cilindro)

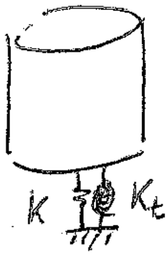
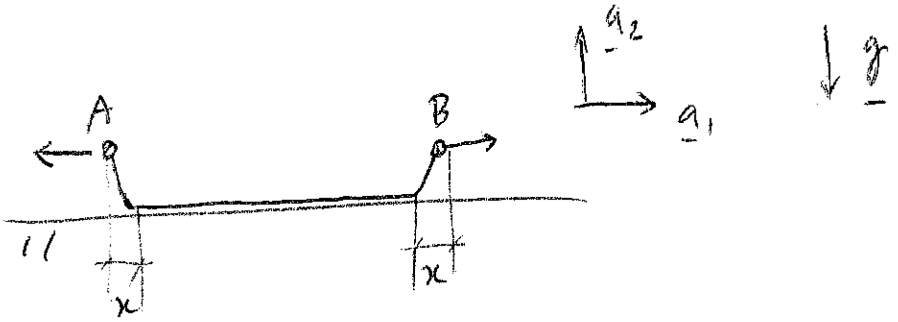
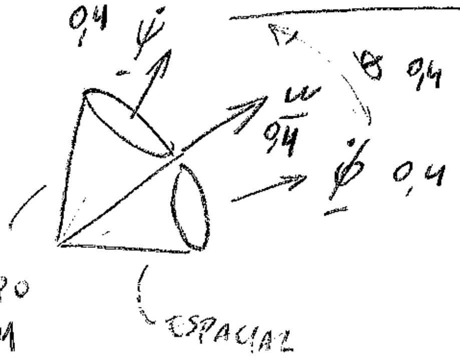


FIGURA 3

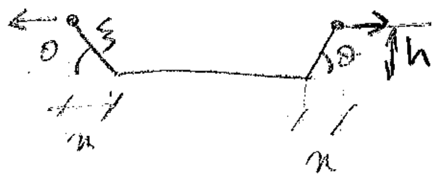


GABARITO P2 2014.2

(1)



(3)



$\xi = \sqrt{h^2 + x^2}$

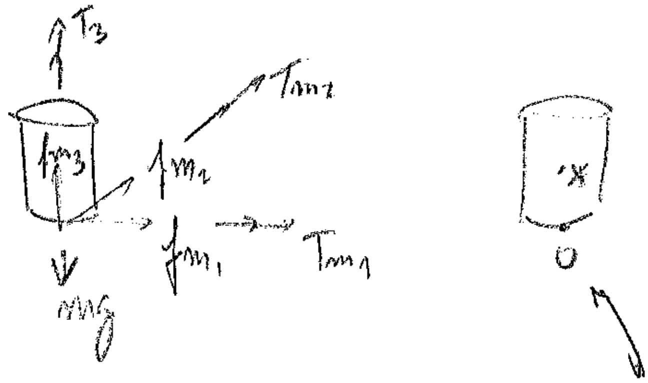
$\xi \cos\theta = x$

$\xi = \dfrac{x}{\cos\theta}$

a) $m = \rho 2\xi$ 0,4 b) $m_0 = \rho(L - 2\xi)$ 0,4

c) $\underline{F}_g = -\rho g 2\xi \, \underline{a}_2$ 0,4 d) $\underline{F} = \left[\rho g 2\xi + 2\rho\dot\xi\dot y + \rho 2\xi \ddot y\right] \underline{a}_2$ 0,8

(4) a)



b) $\underline{F} = -mg\,\underline{a}_3 - K_x \underline{a}_1 - K_y \underline{a}_2 - K_z \underline{a}_3$ 0,5

$\underline{M}^* = \underline{r}^{O/*} \times \underline{F}_{m1} - K_1 \alpha \, \underline{a}_1 - K_2 \beta \, \underline{b}_2 + T_3 \underline{c}_3$ 1,0

$\underline{r}^{O/*} = -L \underline{c}_3$

$$ {}_A T_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} $$

$$ {}_B T_C = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} $$

$$\underline{F}_m = {}_C T_B \, {}_B T_A \begin{pmatrix} -Kx \\ -Ky \\ -Kz \end{pmatrix} = -Kx \underline{b}_1 - Ky \cos\alpha \, \underline{b}_2 - Kz \sin\alpha \, \underline{b}_2 +$$
$$+ Ky \sin\alpha \, \underline{b}_3 - Kz \cos\alpha \, \underline{b}_3$$
$$= -Kx \cos\beta \, \underline{c}_1 - Kx \sin\beta \, \underline{c}_3 - Ky \cos\alpha \, c_2 +$$
$$- Kz \sin\alpha \, \underline{c}_2 - (Ky \sin\alpha - Kz \cos\alpha) \sin\beta \, \underline{c}_1 +$$
$$+ (Ky \sin\alpha - Kz \sin\alpha) \cos\beta \, \underline{c}_3 = (\underline{F}_m)$$

ok

$$\underline{\Omega} \times \underline{F}_m = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ -L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \{ L Kx \sin\beta - L (Ky \sin\alpha - Kz \cos\alpha) \times$$
$$\cos\alpha \} \underline{c}_2 +$$
$$\{ -L Ky \cos\alpha - L Kz \sin\alpha \} \underline{c}_1$$

$$-Kt \alpha \, \underline{a}_1 = -K\alpha \cos\beta \, \underline{c}_1 - K\alpha \sin\beta \, \underline{c}_3$$
$$-Kt \beta \, \underline{b}_2 = -Kt \beta \, \underline{c}_2$$

0,5 b) $\underline{\omega} = \dot{\alpha} \underline{a}_1 + \dot{\beta} \underline{b}_2 = \dot{\alpha} \cos\beta \, \underline{c}_1 + \dot{\alpha} \sin\beta \, \underline{c}_3 + \dot{\beta} \underline{c}_2$

1,0 d) $\underline{\alpha} = (\ddot{\alpha} \cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin\beta) \underline{c}_1 + \ddot{\beta} \underline{c}_2 +$
$$+ (\ddot{\alpha} \sin\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos\beta) \underline{c}_3$$

d) Euler

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Obs} \quad \cos\alpha \simeq \cos\beta \simeq 1 \\ \sin\alpha \simeq \alpha \quad \sin\beta \simeq \beta \\ \alpha\beta \simeq 0 \end{array}}$$

$$-K_t\alpha - LK_y - LK_z\alpha = A$$

$$-K_t\beta + LK_x\beta - LK_y\alpha + LK_z\alpha = B$$

$$T_z = C$$

1,5

$$A \quad I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = \frac{1}{12}m(3r^2 + (2L)^2)(\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}\dot{\beta}\beta) + \frac{1}{12}m(3r^2 (2L)^2)\dot{\beta}\dot{\alpha}\beta$$

$$B \quad I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = \frac{1}{12}m(3r^2 + (2L)^2)\ddot{\beta} - \frac{1}{12}m(3r^2 - (2L)^2)\dot{\alpha}^2\beta$$

$$C \quad I_z\dot{\omega}_z + \underbrace{\cancel{(I_y - I_x)}}_{=0}\omega_x\omega_y = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\alpha}\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta})$$

f) $\underline{a}^* = \underline{a}^o + \underline{\omega}\times\underline{\omega}\times\underline{r}^{*/o} + \underline{\alpha}\times\underline{r}^{*/o}$

1,5

$\underline{r}^{*/o} = L\underline{c}_3$, $\underline{a}^o = \ddot{x}\underline{a}_1 + \ddot{y}\underline{a}_2 + \ddot{z}\underline{a}_3$

$\underline{\alpha}\times\underline{r} = L\ddot{\beta}\underline{c}_1 - L(\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}\dot{\beta}\beta)\underline{c}_2$

$\underline{\omega}\times\underline{r} = L\dot{\alpha}\underline{c}_2 - L\dot{\beta}\underline{c}_1$

$\underline{\omega}\times\underline{\omega}\times\underline{r} = -L\dot{\alpha}^2\underline{c}_3 + L\dot{\beta}\underline{c}_3 - L\dot{\alpha}^2\beta\underline{c}_1 - L\dot{\alpha}\dot{\beta}\beta\underline{c}_2$