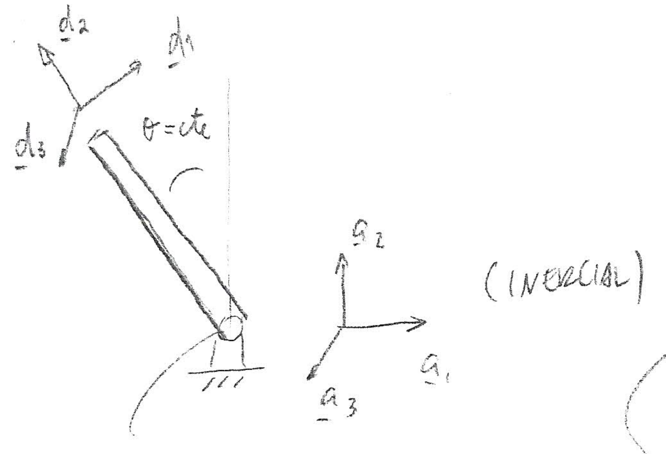
21/05/2014 - P2 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

1) (2,5) Considere a barra mostrada na Figura 1. A base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ está fixa no referencial inercial, e a base $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ é solidária à barra. A barra gira $\omega_0 \mathbf{d}_2$ e também $\Omega \mathbf{a}_2$. Se $\omega_0 = cte$ e $\Omega = cte$, (a) calcule e desenhe o vetor velocidade angular da barra $\boldsymbol{\omega}$ em relação ao referencial inercial, (b) desenhe o cone espacial e o cone do corpo. Se ω_0 e Ω *não* são constantes, mas θ se mantém constante, (c) calcule o vetor aceleração angular da barra $\boldsymbol{\alpha}$ em relação ao referencial inercial.

2) (1,5) Considere o sistema mostrado na Figura 2. O sistema elimina massa no sentido negativo de $\mathbf{a}_1$ e se movimenta no sentido negativo de $\mathbf{a}_2$ devido à ação da gravidade. (a) Escreva as equações de movimento nas direções $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, e (b) escreva a expressão para a aceleração do sistema principal ($\ddot{x}\mathbf{a}_1$) sabendo que a taxa de massa eliminada é constante $\dot{m}$, que a velocidade relativa entre sistema principal e massa eliminada é u, e que a força de resitência do ar é $k\dot{x}^2$ no sentido oposto ao movimento.

3) (2,5) Considere a turbina mostrada na Figura 3, que trabalha em regime permanente (fluxo constante de vapor). Vapor entra por baixo com velocidade conhecida $v^e \mathbf{a}_2$, faz o eixo de raio r girar e volta para baixo com velocidade $v^s \mathbf{a}_2$. (a) Desenhe o volume de controle que será usado para os cálculos e calcule v^s, (c) calcule as forças que atuam na estrutura suporte (fixa) devido ao fluxo de vapor, (d) calcule os momentos que atuam no suporte em relação ao ponto O. (e) Se fosse dada liberdade ao suporte de girar em torno de $\mathbf{a}_3$, ele giraria? Se sim, em que sentido.

4) (3,5) Considere o sistema rotodinâmico mostrado na Figura 4. Um disco (m, r) é montado no centro de um eixo de massa desprezível e comprimento L. (a) Faça o diagrama de corpo livre para esse sistema considerando que o mancal A é radial e de escora e o mancal B é apenas radial. Considere agora apenas o disco que gira com velocidade constante $\dot{\psi}\mathbf{d}_1$. (b) Faça o diagrama de corpo livre do disco e escreva a Eq. de Newton, sabendo que a posição do centro de massa se mantém no mesmo lugar. Considere que o eixo é flexível permitindo ao disco de girar α e β, e que os momentos resistivos são proporcionais aos ângulos α e β, com constante de mola torcional k_t. (c) calcule o vetor velocidade angular do disco (na base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ ou $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$), (d) calcule a derivada das componentes do vetor velocidade angular, (e) escreva as equações de Euler, (f) simplifique as equações para o caso de pequenos ângulos α e β.

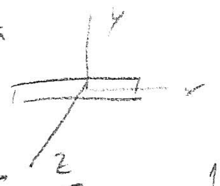


JUNTA ESFÉRICA

FIGURA 1

TABELA

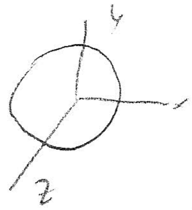
Barra



$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_{xx} = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Disco



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

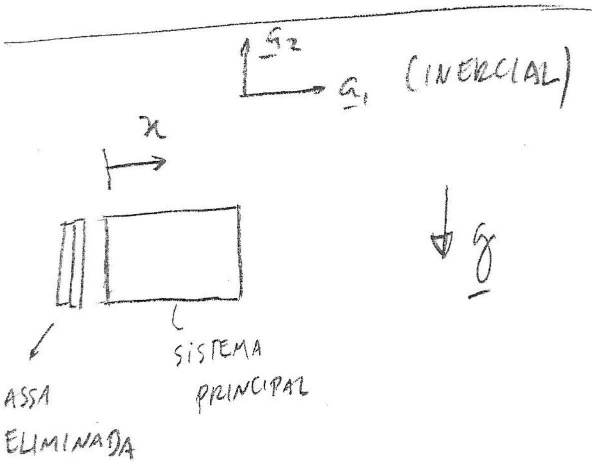


FIGURA 2

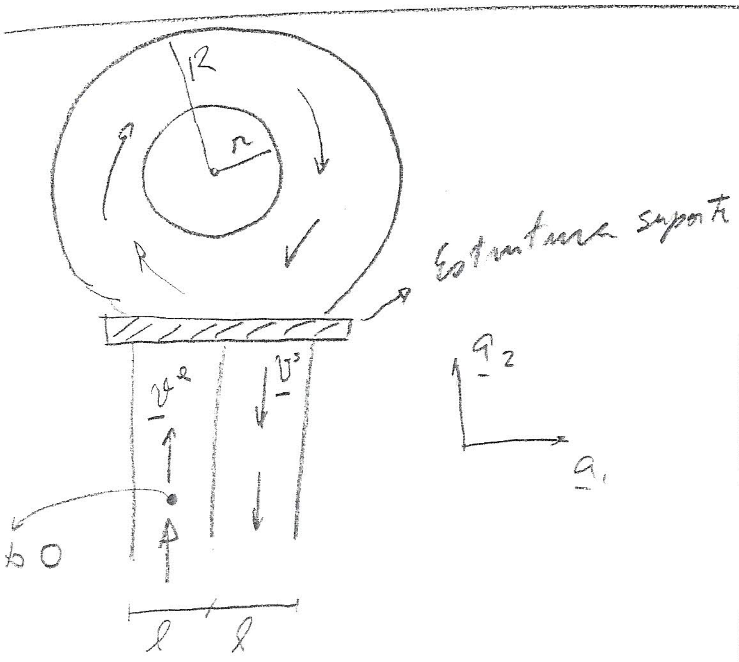
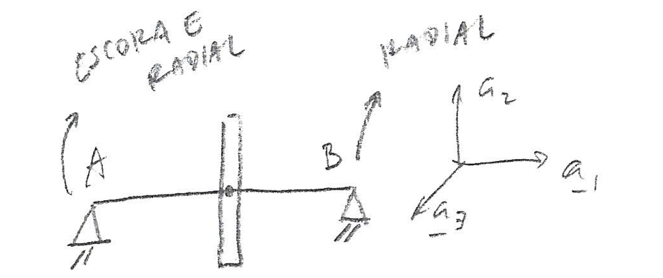


FIGURA 3



$$A \xrightarrow{\alpha(2)} B \xrightarrow{\beta(3')} C \xrightarrow{\psi(1')} D$$

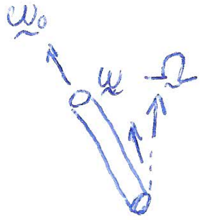
(INERCIAL) (DISCO)

FIGURA 4

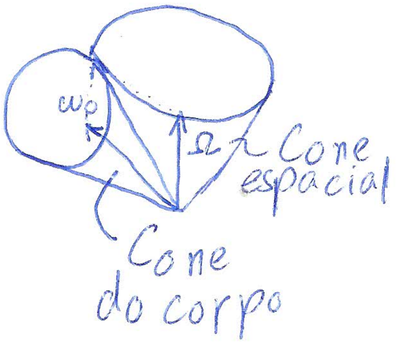
P2 - 2014.1

1) a)

$$\underset{\sim}{\omega} = \Omega \underset{\sim}{a}_2 + \omega_0 \underset{\sim}{d}_2$$
$$= \Omega \underset{\sim}{a}_2 + \omega_0 \cos\theta \, \underset{\sim}{b}_2 - \omega_0 \,\text{sen}\,\theta \, \underset{\sim}{b}_1$$

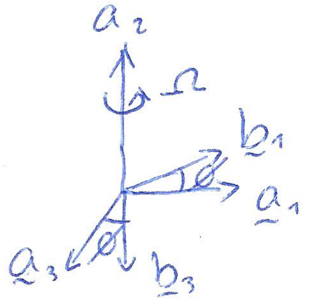


b)



c)

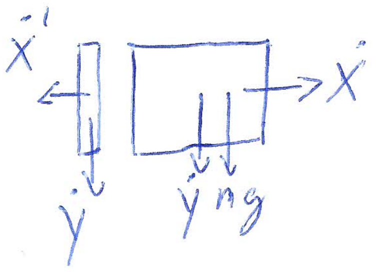
$$\underset{\sim}{\alpha} = \frac{{}^R d\underset{\sim}{\omega}}{dt} = \dot{\Omega} \underset{\sim}{a}_2 + \dot{\omega}_0 \cos\theta \, \underset{\sim}{b}_2 - \dot{\omega}_0 \,\text{sen}\,\theta \, \underset{\sim}{b}_1 + \Omega \omega_0 \,\text{sen}\,\theta \, \underset{\sim}{b}_3$$



2)

$$\underset{\sim}{F} = m \frac{{}^R dv}{dt} + \dot{m}(v - v^0) \qquad \underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} -K\dot{x}^2 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\dot{y} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{{}^R dv}{dt} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ -\ddot{y} \end{bmatrix} \qquad v^0 = \begin{bmatrix} -\dot{x}' \\ -\dot{y} \end{bmatrix} \qquad m = m_{in} - \dot{m}t$$

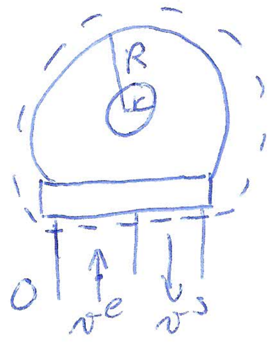


(Todos os vetores estão na base $\underset{\sim}{a}$)

$$-K\dot{x}^2 = m\ddot{x} + (\overbrace{\dot{x} + \dot{x}'}^{u})\dot{m}$$
$$-mg = -m\ddot{y} + (\dot{y} - \dot{y})\dot{m} \Rightarrow \begin{matrix} m\ddot{x} + K\dot{x} + \dot{m}u = 0 \\ \ddot{y} = g \end{matrix}$$

$$\ddot{x} = -\frac{K\dot{x}^2}{m} - \frac{\dot{m}u}{m}$$

3) a) VC



· Regime permanente

· Escoamento incompressível

$$m' = -m'_0 \Leftrightarrow \rho_e A_e v^e = -\rho_s A_s v^s$$

$$v^s = -v^e a_2$$

b) $F = m'(v^s - v^e) = -2m'v^e a_2 \Rightarrow$ NO FLUIDO

$$F_{suporte} = -F = 2m'v^e a_2$$

c) $M = m'(r^{S/O} \times v^s - r^{E/O} \times v^e)$

$$M^O = m'(L a_1 \times (-v^e a_2) - 0 \times v^e a_2)$$

$$= -m' L v^e a_3$$

d) $M_1 = 0$

$M_2 = 0$

$M_3 = \cancel{r^{F/M}} \times F = 0$

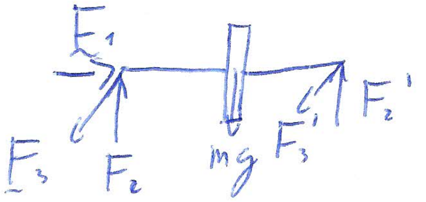
Logo, não giraria.

analogamente

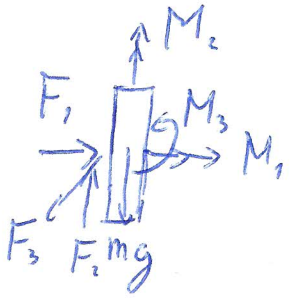
$$M_3 a_3 + F_2 \frac{L}{2} a_3 = -m'(L v^e) a_3$$

$$M_3 = 0 \Leftrightarrow F_2 \frac{L}{2} + m'(L v^e) = 0$$

4) a)



b)



c) $\omega = \dot\alpha b_2 + \dot\beta c_3 + \dot\psi c_1$

$$= \dot\alpha \cos\beta\, c_2 + \dot\alpha \operatorname{sen}\beta\, c_1 + \dot\beta c_3 + \dot\psi c_1$$

d) $\frac{{}^c d}{dt}\omega = (\ddot\alpha \operatorname{sen}\beta + \dot\alpha\dot\beta \cos\beta) c_1 + (\ddot\alpha \cos\beta - \dot\alpha\dot\beta \operatorname{sen}\beta) c_2 + \ddot\beta c_3$

e) $M_1 = \frac{1}{2} m r^2 (\ddot{\alpha} \,\mathrm{sen}\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta) + \cancel{\frac{1}{4} m r^2 \dot{\beta}\dot{\alpha}\cos\beta} + \cancel{- \frac{1}{4} m r^2 \dot{\alpha}\cos\beta\dot{\beta}}$

$M_2 = \frac{1}{4} m r^2 (\ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\,\mathrm{sen}\beta) + \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\psi} + \dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\beta)\dot{\beta} + - \frac{1}{4} m r^2 \dot{\beta}\dot{\psi}$

$M_3 = \frac{1}{4} m r^2 \ddot{\beta} + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\alpha}^2 \,\mathrm{sen}\beta\cos\beta - \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\psi} + \dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\beta)\dot{\alpha}\cos\beta$

$\underset{\sim}{M} = -K_T \alpha \underset{\sim}{b}_2 - K_T \beta \underset{\sim}{c}_3 = -K_T \alpha (\cos\beta \underset{\sim}{c}_2 + \mathrm{sen}\beta \underset{\sim}{c}_1) - K_T \beta \underset{\sim}{c}_3$

f) $\boxed{-K_T \widetilde{\alpha\beta}^{\approx 0} = 0 = \frac{1}{2} m r^2 (\ddot{\alpha}\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta})}$

$-K_T \alpha = \frac{1}{4} m r^2 (\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}\dot{\beta}\beta) + \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\psi} + \dot{\alpha}\beta)\dot{\beta} + - \frac{1}{4} m r^2 \dot{\beta}\dot{\psi} \Rightarrow -K_T \alpha = \frac{1}{4} m r^2 (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\beta) + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\psi}\dot{\beta} - \frac{1}{4} m r^2 \dot{\beta}\dot{\psi}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} m r^2 (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\beta + \dot{\beta}\dot{\psi}) = -K_T \alpha}$

$-K_T \beta = \frac{1}{4} m r^2 \ddot{\beta} + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\alpha}^2 \beta - \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\psi}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow -K_T \beta = \frac{1}{4} m r^2 \ddot{\beta} + \frac{1}{4} m r^2 (-2\dot{\psi}\dot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 \beta)$