23/11/2012 - P2 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

* Se nada for mencionado, considere o referencial inercial.

1) Considere um corpo axissimétrico livre de torque ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$). (a) (1,0) desenhe o corpo (escolha um corpo axissimétrico qualquer), o vetor velocidade de precessão, o vetor velocidade *spin* e o vetor velocidade angular do corpo, (b) (1,0) calcule a aceleração angular do corpo, parametrizando as rotações usando ângulos de Euler e desenhe o vetor resultante no desenho da letra (a).

2) Considere o sistema mostrado na Fig. 1. Uma barra de massa m e comprimento l está conectada com um disco de massa m e raio r e com uma partícula de massa m. O sistema gira $\dot{\psi}\mathbf{b}_1$ e $\dot{\phi}\mathbf{b}_2$ com $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ constantes. Sabendo que o vínculo no ponto O permite apenas os movimentos de rotação indicados, (a) (0,5) desenhe as bases auxiliares (inercial e solidária ao disco) e escreva as matrizes de transformação, (b) (1,0) faça o diagrama de corpo livre do sistema e escreva o vetor das forças e momentos resultantes, (c) (0,5) desenvolva as equações da 2a Lei de Newton, (d) (1,0) desenvolva as 3 equações extras para os momentos, (e) (0,5) indique as incógnitas do problema. (f) (0,5) Qual o movimento da barra se o vínculo no ponto O permitisse rotação em $\mathbf{b}_3$?

3) (2,0) Considere um eixo girando com velocidade constante $\Omega\mathbf{b}_2$, um eixo soldado ao primeiro com ângulo fixo θ, um disco de raio r girando $\omega_0\mathbf{c}_1$ ($\omega_0 = cte$) e uma barra deslizando em uma fenda do disco, sem se descolar dele. (a) calcule a aceleração do centro de massa da barra no referencial inercial, (b) calcule a aceleração do centro de massa da barra no referecial C. As bases $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ e $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ giram com $\Omega\mathbf{b}_2$, e $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ está solidária ao disco.

4) (2,0) Considere a coluna de perfuração de petróleo mostrada na Fig. 3. Obtenha a equação de movimento da coluna, levando-se em conta um modelo simplificado com apenas 1 grau de liberdade θ. O cilindro gira θ na direção de $\mathbf{a}_2$, a rotação imposta no topo Ω_0 é constante, a constante da mola torcional k_t depende das propriedades da coluna e é dada ($= JG/L$), e a mola tem comportamento linear (torque proporcional ao deslocamento angular da mesma).

FIGURA 1

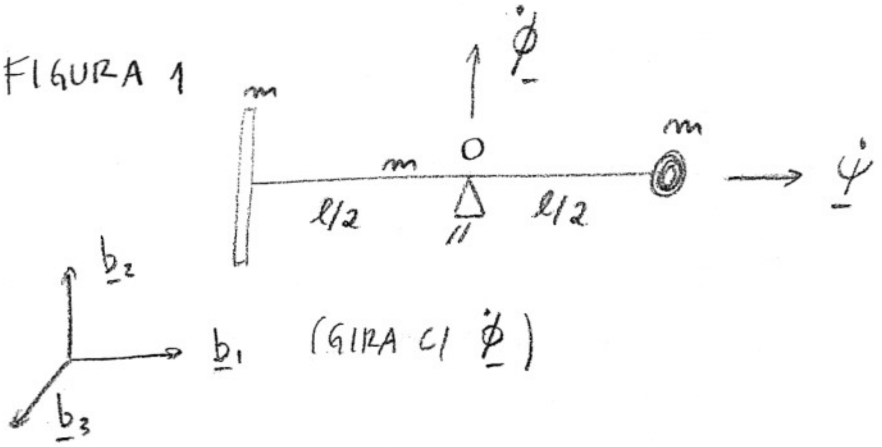
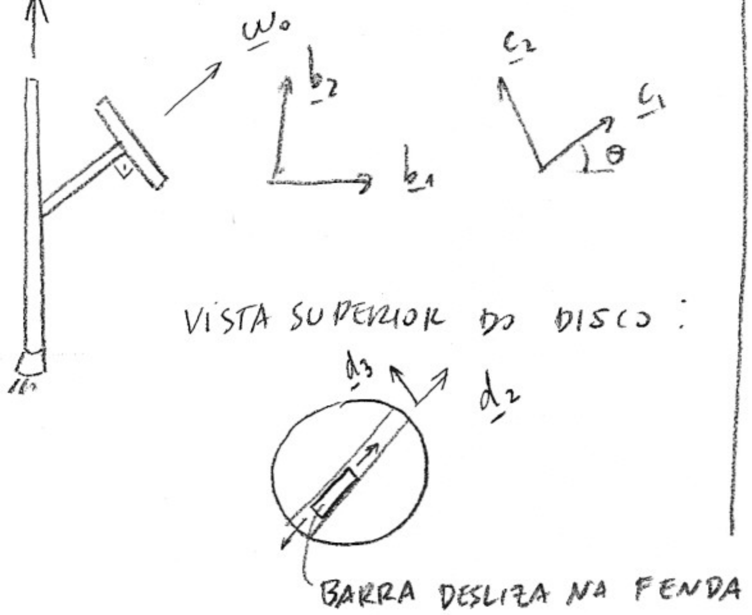


FIGURA 2



TABELA

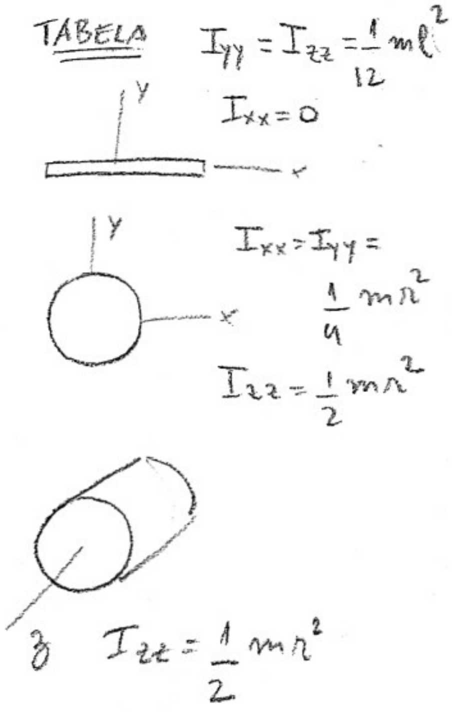
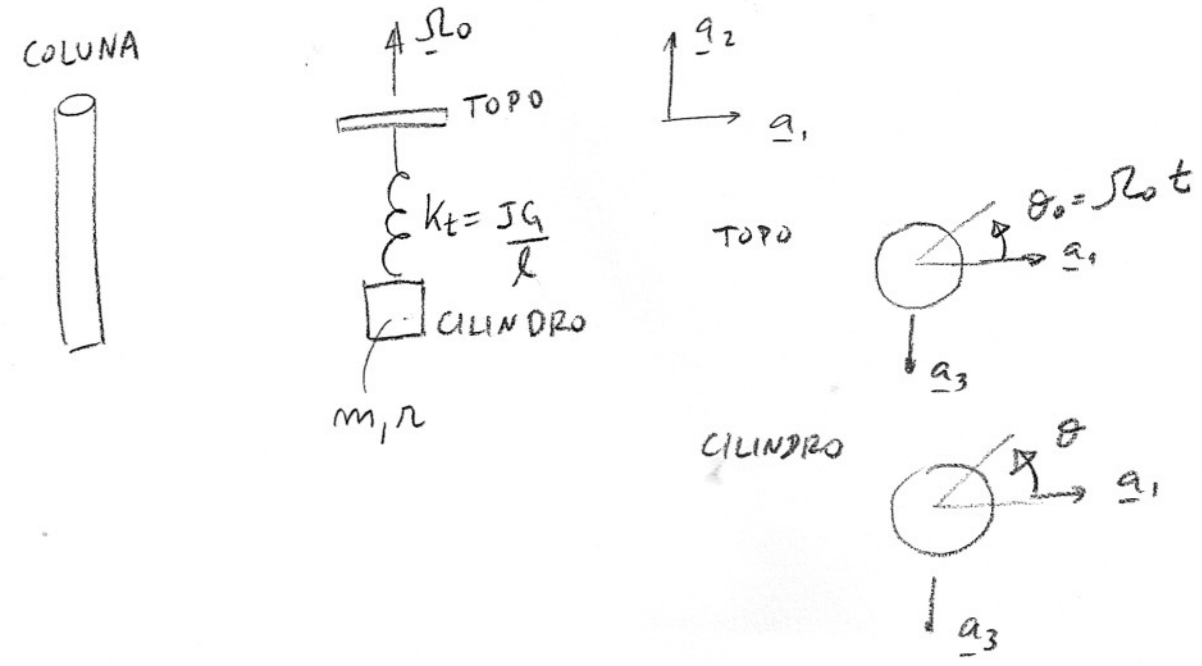


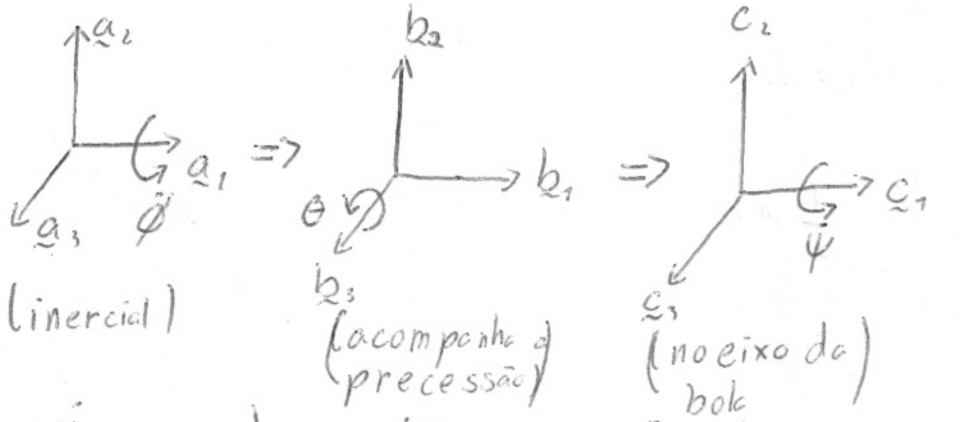
FIGURA 3



P2 2012-2

1) Corpo Axissimétrico: Bola de Futebol Americano:

onde θ é o ângulo de nutação, $\dot\phi$ é a velocidade de precessão e $\dot\psi$ é a velocidade de spin.

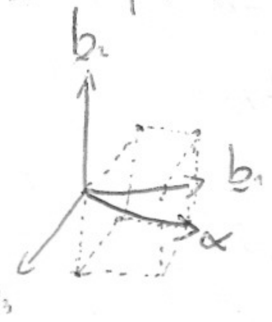


$$\omega = \dot\phi\, b_1 + \dot\psi\, c_1 = \dot\phi\, b_1 + \dot\psi \cos\theta\, b_1 - \dot\psi \,\text{sen}\,\theta\, b_2$$

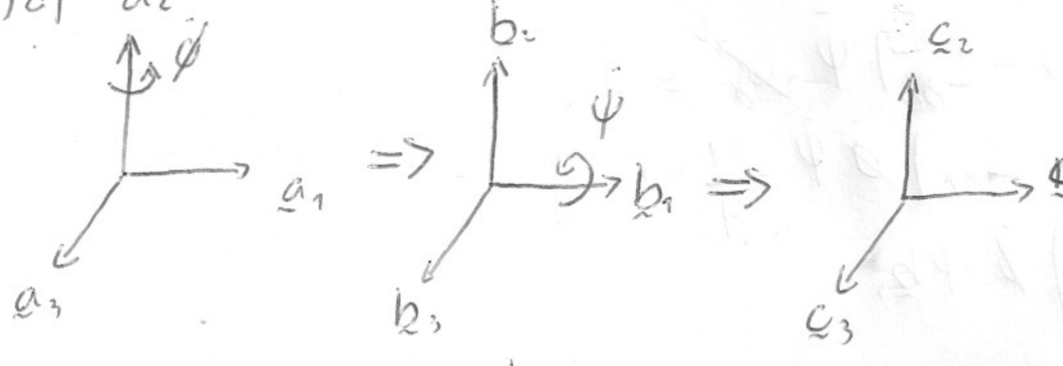
$$\alpha = \frac{{}^{R}d}{dt}\omega = (\ddot\phi + \ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\dot\theta\,\text{sen}\,\theta)\, b_1 - (\ddot\psi\,\text{sen}\,\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta)\, b_2 - \dot\psi\dot\phi\,\text{sen}\,\theta\, b_3$$

Se θ cte:

$$\alpha = (\ddot\phi + \ddot\psi\cos\theta)\, b_1 - (\ddot\psi\,\text{sen}\,\theta)\, b_2 - \dot\psi\dot\phi\,\text{sen}\,\theta\, b_3$$



2) c)



$[{}_BT_A] = [{}_AT_B]^T$

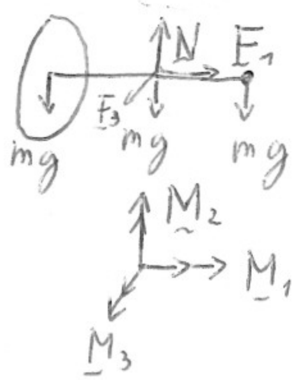
$[{}_CT_B] = [{}_BT_C]^T$

$[{}_AT_C] = [{}_AT_B][{}_BT_C]$

$[{}_CT_A] = [{}_AT_C]^T$

$$[{}_AT_B] = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\,\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \quad [{}_BT_C] = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\,\psi & 0 \\ \text{sen}\,\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)



c) ${}^{R}p^{CM/O} = 0$

${}^{R}\dot{x}^{CM} = 0$

${}^{R}a^{CM} = 0$

$$\underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_1 = 0 \\ N = 3mg \\ F_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{F} = F_1 \underset{\sim}{b}_1 + F_3 \underset{\sim}{b}_3 + (N - 3mg)\underset{\sim}{b}_2$$

$$\underset{\sim}{M} = M_1 \underset{\sim}{b}_1 + M_2 \underset{\sim}{b}_2 + M_3 \underset{\sim}{b}_3$$

d) $\omega = \dot{\phi}\,\underset{\sim}{b}_2 + \dot{\psi}\,\underset{\sim}{b}_1$

$$[{}^{O}I^{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}$$

$$[{}^{O}I^{p}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \quad [{}^{O}I^{D}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mr^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{L^2}{4} \end{bmatrix} =$$

$$[{}^{O}I^{S}] = [{}^{O}I^{b}] + [{}^{O}I^{p}] + [{}^{O}I^{D}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m(r^2+L^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(r^2+L^2) \end{bmatrix}$$

$$[{}^{O}I^{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2+7L^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(3r^2+7L^2) \end{bmatrix}$$

$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2$

$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12}m(3r^2+7L^2)$

Aplicando a Lei de Euler:

$$M_1 = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \cancelto{0}{\ddot{\psi}} + \cancelto{0}{(I_{zz} - I_{yy})}\,\dot{\phi} \cdot \cancelto{0}{\omega_z} = 0$$

$$M_2 = I_{yy}\cancelto{0}{\ddot{\phi}} + (I_{xx} - I_{zz})\,\dot{\psi} \cdot \cancelto{0}{\omega_z} = 0$$

$$M_3 = I_{zz}\cancelto{0}{\dot{\omega}_z} + (I_{yy} - I_{xx})\,\dot{\phi}\,\dot{\psi} = \left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{7}{12}mL^2 - \frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\phi}\,\dot{\psi}\,\underset{\sim}{b}_3$$

$$M_3 = \left(\frac{7}{12}mL^2 - \frac{1}{4}mr^2\right)\dot{\phi}\,\dot{\psi}\,\underset{\sim}{b}_3$$

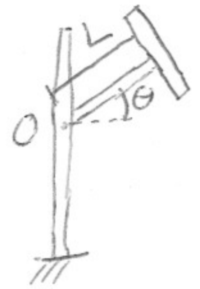
e) Incógnitas: $\{N, F_1, F_3, M_1, M_2, M_3\}$

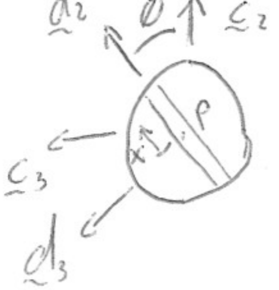
f) Se $L > r\sqrt{\frac{3}{7}}$, gira em $+\underset{\sim}{b}_3$.

Se $L < r\sqrt{\frac{3}{7}}$, gira em $-\underset{\sim}{b}_3$.

Se $L = r\sqrt{\frac{3}{7}}$, não há giro.

3) a)





$$\rho^{CM/O} = L\,\underset{\sim}{c}_1 + x\,\underset{\sim}{d}_2$$

$$\rho^{CM/O} = (L\cos\theta - x\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\underset{\sim}{b}_1 + (L\,\mathrm{sen}\,\theta + x\cos\phi\cos\theta)\,\underset{\sim}{b}_2 - x\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underset{\sim}{b}_3$$

$$^{R}v^{CM} = (x\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta - L\cos\theta)\,\Omega\,\underset{\sim}{b}_3 + (-\dot{x}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta + x\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\underset{\sim}{b}_1 + (\dot{x}\cos\phi\cos\theta - x\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)\,\underset{\sim}{b}_2 - (\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\phi + x\,\omega_0\cos\phi)\,\underset{\sim}{b}_3 - x\,\Omega\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underset{\sim}{b}_1$$

$$^{R}a^{CM} = (L\cos\theta - x\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\Omega^2\,\underset{\sim}{b}_1 + (\dot{x}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta - x\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\Omega\,\underset{\sim}{b}_3 +$$
$$+ (\dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{x}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta + x\,\omega_0^2\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\underset{\sim}{b}_1 +$$
$$+ (\dot{x}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta - x\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\Omega\,\underset{\sim}{b}_3 + (\ddot{x}\cos\phi\cos\theta - \dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta -$$
$$- \dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta - x\,\omega_0^2\cos\phi\cos\theta)\,\underset{\sim}{b}_2 - (\dot{x}\,\Omega\,\mathrm{sen}\,\phi + x\,\omega_0\,\Omega\cos\phi)\,b_1 +$$
$$+ x\,\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underset{\sim}{b}_3 - (\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\phi + x\,\omega_0\cos\phi)\,\Omega\,\underset{\sim}{b}_1 - (\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{x}\,\omega_0\cos\phi +$$
$$+ \dot{x}\,\omega_0\cos\phi - x\,\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\underset{\sim}{b}_3$$

b) $\rho^{CM/P} = x\,\underset{\sim}{d}_2 = x\cos\phi\,\underset{\sim}{c}_2 - x\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underset{\sim}{c}_3$

$$^{C}v^{CM} = \dot{x}\cos\phi\,\underset{\sim}{c}_2 - x\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underset{\sim}{c}_2 - \dot{x}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underset{\sim}{c}_3 - x\,\omega_0\cos\phi\,\underset{\sim}{c}_3$$

$$^{C}a^{CM} = (\ddot{x}\cos\phi - \dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi - \dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi - x\,\omega_0^2\cos\phi)\,\underset{\sim}{c}_2 - (\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\phi +$$
$$+ \dot{x}\,\omega_0\cos\phi + \dot{x}\,\omega_0\cos\phi - x\,\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\phi)\,c_3$$

$$^{C}a^{CM} = (\ddot{x}\cos\phi - 2\dot{x}\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,\phi - x\,\omega_0^2\cos\phi)\,c_2 + (x\,\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\phi - 2\dot{x}\,\omega_0\cos\phi -$$
$$- \ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\underset{\sim}{c}_3$$

4) Movimento no plano:

$$\underset{\sim}{M} = [I]\,\alpha$$

$$K_t(\theta_0 - \theta) = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \frac{JG}{L} = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta}\,\frac{1}{(\theta_0 - \theta)} \Rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} + \frac{JG}{L}(\theta - \Omega_0 t) = 0$$