04/07/2012 - P2 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

Considere todos os pedidos no referencial inercial.

1) (1,5) O que é o efeito giroscópico? Dê um exemplo onde esse efeito aparece.

2) (2,0) Considere um corpo com tensor de inércia e cinemática conhecidos: $[I^*] = [0\ 0\ 0\ ;\ 0\ I_{yy}\ I_{yz}\ ;\ 0\ I_{yz}\ I_{zz}]$ e $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, 0, \omega_z)$, escritos na base solidária ao corpo. Qual é o valor das componentes do momento resultante das forcas externas em relação ao centro de massa (M_x, M_y, M_z), dadas as informações acima? (Dica $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$)

3) (2,0) Considere o braço mecânico mostrado na Fig. 1 composto por duas barras B1 e B2 articuladas por pinos (nos pontos O e A) e uma mão que carrega um objeto. A base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ está fixa na barra B2 e a base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ está orientada conforme mostra a figura e acompanha o movimento de giro Ω constante. Um motor no ponto A impõe um momento M_A na direção de $\mathbf{b}_3$ e a mão pode girar livremente sem atrito na direção de $\mathbf{b}_1$. Pede-se: (a) (0,5) o diagrama de corpo livre da barra B2, (b) (0,5) o vetor velocidade angular de B2 na base solidária a B2 e (c) (1,0) se os momentos externos (M_x, M_y, M_z) e o tensor diagonal de inércia $(0, I_y, I_z)$ na base solidária a B2 são conhecidos, como ficam as equações da Lei de Euler para a barra B2? (Considere $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ constantes).

4) (4,5) O disco fino D com massa m e raio r está soldado à barra B (de massa desprezível) que possui comprimento L e que está conectada a uma junta esférica no ponto O. O sistema se movimenta de tal forma que o disco rola sobre o plano inclinado indicado na Fig. 2. Considere as velocidades angulares $\dot{\theta}$ e Ω conforme mostra a figura. Pede-se para escrever na base B: (a) (0,5) o vetor velocidade angular do sistema, (b) (0,75) [a velocidade do centro de massa] Sabendo que o sistema é abandonado a partir do repouso no instante t0, pede-se: (c) (0,75) as energias cinética e potencial no instante t0, (d) (0,75) as energias cinética e potencial no instante t1 (indicado na figura), (e) (0,75) o diagrama de corpo livre e o trabalho realizado pelas forças não-conservativas, (f) (1,0) a velocidade do centro de massa no instante t1. Obs. A base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ está orientada na direção da barra e a base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ está orientada conforme mostra a figura; ambas acompanham o movimento de giro Ω.

Figura 1

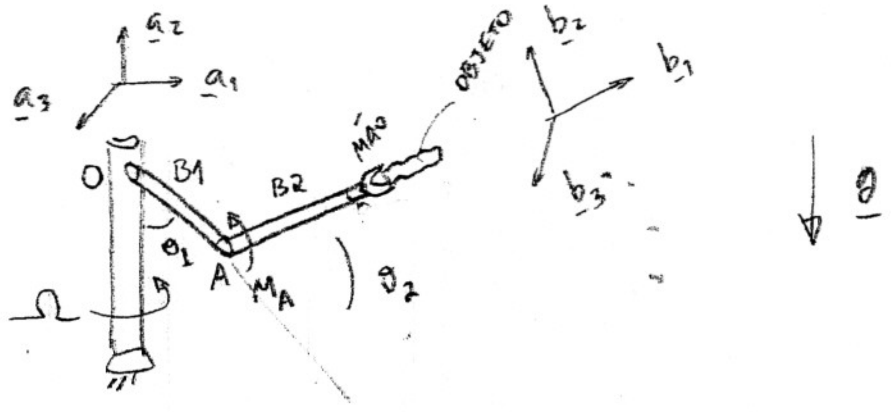
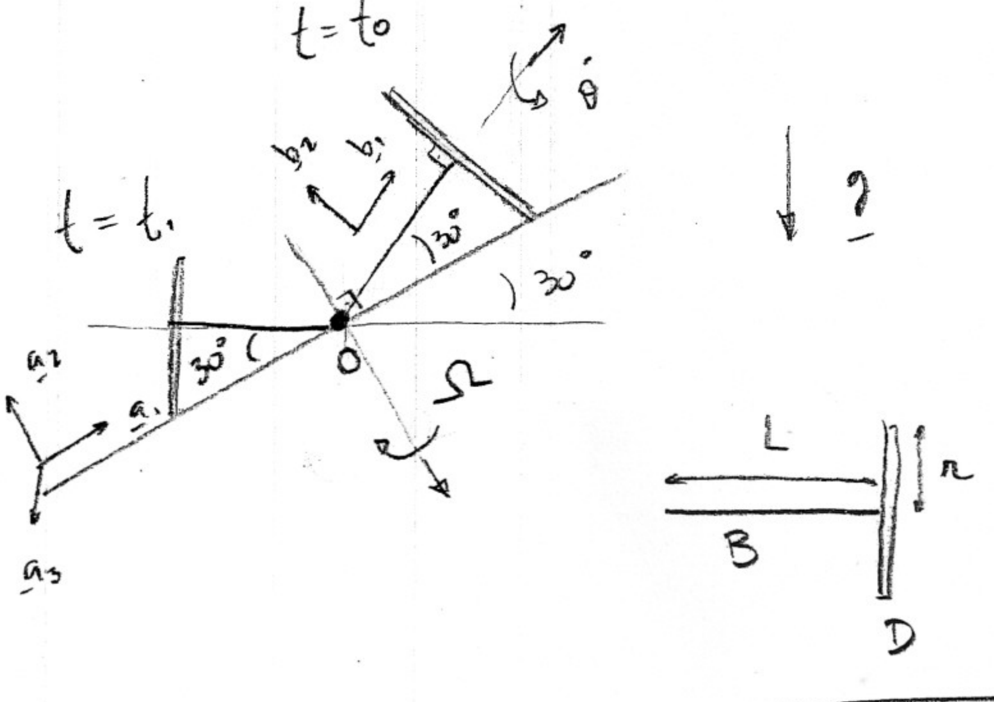
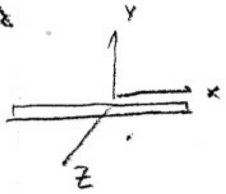


Figura 2



TABELA

BARRA



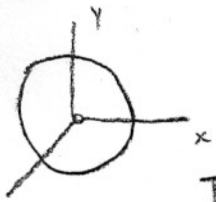
$$I_y = I_z = \frac{1}{12} m L^2$$

$$I_x = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

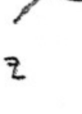
DISCO

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} m r^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$



$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$



P2-2012.1

1) É o movimento que ocorre em um corpo rígido quando o vetor quantidade de movimento angular não está alinhado com o vetor de momento resultante. Nesse caso, o corpo gira na direção perpendicular a $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{H}$. Ex: Roda de bicicleta.

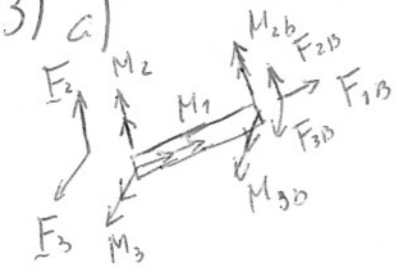
2)

$$[I^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H} = [I^*]\underset{\sim}{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{yz}\,\omega_z \\ I_{zz}\,\omega_z \end{pmatrix}, \quad M^{F/c} = \dot{H}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{yz}\,\dot{\omega}_z \\ I_{zz}\,\dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{yz}\,\omega_z^2 \\ -I_{zz}\,\omega_x\,\omega_z \\ I_{yz}\,\omega_x\,\omega_z \end{pmatrix}$$

$$M_x = -I_{yz}\,\omega_z^2$$
$$M_y = I_{yz}\,\dot{\omega}_z - I_{zz}\,\omega_x\,\omega_z$$
$$M_z = I_{zz}\,\dot{\omega}_z + I_{yz}\,\omega_x\,\omega_z$$

3) a)



b) $$\underset{\sim}{\omega}^{B_2} = \Omega\,\underset{\sim}{a}_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\,\underset{\sim}{b}_3$$
$$= \Omega\cos(\theta_1+\theta_2)\,b_1 + \Omega\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\,b_2 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\,b_3$$

c) Aplicando a lei de Euler:

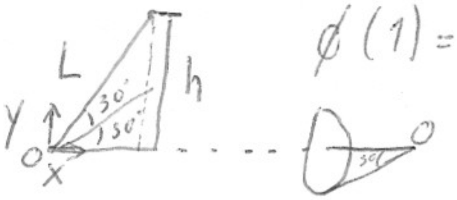
$$M_x = 0$$
$$M_y = I_y\,\Omega\cos(\theta_1+\theta_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) - I_z\,\Omega\cos(\theta_1+\theta_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$$
$$M_z = I_y\,\Omega^2\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)$$

4) a) $$-\Omega\,\underset{\sim}{a}_2 + \dot{\theta}\,\underset{\sim}{b}_1 = \underset{\sim}{\omega} = \left(\dot{\theta} - \frac{1}{2}\Omega\right)\underset{\sim}{b}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega\,\underset{\sim}{b}_2$$

b) $${}^R\underset{\sim}{v}^c = \Omega L\frac{\sqrt{3}}{2}\,\underset{\sim}{b}_3$$ e, se rola sem deslizar:

$${}^R\underset{\sim}{v}^c = \Omega L\frac{\sqrt{3}}{2}\,\underset{\sim}{b}_3 = \dot{\theta}\,r\,\underset{\sim}{b}_3$$

c) $K(0)=0 \quad \phi(0) = mgh = mgL\,\cancel{\text{sen}}\,60^\circ = mgL\frac{\sqrt{3}}{2}$



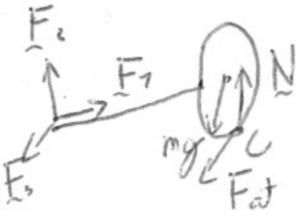
$\phi(1) = mgh = mg0$

$K(1) = \frac{1}{2} m(\dot{\underset{\sim}{r}}^c)^T \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}^c + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\omega}[I]\underset{\sim}{\omega}$

$= \frac{1}{2} m\left(\Omega L \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}\Omega^2 - \dot{\theta}\Omega\right) + \frac{1}{4} mr^2\left(\frac{3}{4}\Omega^2\right)$

$= \frac{3}{8} m\Omega^2 L^2 + \frac{1}{2} mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}\Omega^2 - \dot{\theta}\Omega\right) + \frac{3}{16} mr^2\Omega^2$

e)



$W_{F_1,F_2,F_3} = 0 = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cancel{dr}^{\,0}$

$W_{mg} = W_N = 0 \Leftrightarrow F \cdot dr = 0$

$W_{F_{at}} = 0 \Leftrightarrow W_{F_{at}} = \int F_{at}\,\cancel{\dot{r}}^{\,0}\,dt \Leftrightarrow {}^R\dot{\underset{\sim}{r}}^c = 0 \Rightarrow$ rola s/ deslizar

d) Logo, há conservação de energia:

$\cancel{K(0)}^{\,0} + \phi(0) = K(1) + \cancel{\phi(1)}^{\,0}$

$\frac{3}{8}\cancel{m}\Omega^2L^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}r^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}\Omega^2 - \dot{\theta}\Omega\right) + \frac{3}{16}\cancel{m}r^2\Omega^2 = \cancel{m}gL\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\dot{\theta} = \Omega\frac{L}{r}\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{3}{8}\Omega^2L^2 + \frac{1}{2}\cancel{r^2}\Omega^2\frac{L^2}{\cancel{r^2}}\frac{3}{4} + \frac{1}{8}r^2\Omega^2 - \frac{1}{4}\Omega^2\frac{L}{\cancel{r}}r^{\cancel{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{16}r^2\Omega^2 =$

$= gL\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{6}{8}\Omega^2L^2 + \frac{1}{8}r^2\Omega^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\Omega^2Lr + \frac{3}{16}r^2\Omega^2 = gL\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Omega^2\underbrace{\left(\frac{3}{4}L^2 + \frac{1}{8}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}Lr + \frac{3}{16}r^2\right)}_{\alpha} = gL\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{gL\sqrt{3}}{2\alpha}}$