20/05/2013 - P1 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

1) (2,0) Obtenha o momento de inércia I_{xx} e o produto de inércia I_{xy} em relação ao ponto O da estrutura mostrada na Fig. 1: uma placa quadrada de espessura t e lado L composta por dois materiais ρ_1 (disco de raio R) e ρ_2 (resto da placa). Deixe a resposta em função de t, L, R, ρ_1 e ρ_2.

2) (1,5) Calcule o Lagrangeano ($L = K - \Phi$) do sistema mostrado na Fig. 2: uma barra de comprimento L e massa m, que gira $\dot{\theta}$, e que está fixa em um carrinho de massa M. Obs. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base fixa no referencial inercial e x mede a deflexão da mola a partir do ponto de equilíbrio.

3) (3,5) A Fig. 3 mostra um bondinho suspenso em um cabo de aço. O ponto O do bondinho se movimenta sem atrito com velocidade dada por $\mathbf{v}^0 = (v + \dot{y})\mathbf{a}_2$, onde v é uma constante e y é a deflexão do cabo na direção de $\mathbf{a}_2$. As forças devido ao movimento do cabo nas direções $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são modeladas como forças elásticas lineares com constantes k_x e k_y. Pede-se: (a) o diagrama de corpo livre do bondinho, (b) as equações de movimento obtidas pela Lei de Newton, e (c) uma equação para o ângulo θ apenas em função dos dados do problema (m, g, l, v, I^0, I^C, k_x, k_y). Obs. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base fixa no referencial inercial e $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ é solidária ao bondinho.

4) (3,0) Considere uma esfera de raio r e massa m rolando sem deslizar num plano como mostra a Fig. 4. No instante 1 sabemos a velocidade do centro de massa $v\mathbf{a}_2$ e a velocidade angular do corpo $-\omega\mathbf{a}_3$. Pede-se: (a) a energia cinética do corpo no instante 2, antes do impacto com o degrau (b) se o impulso linear for conhecido, $\mathbf{I} = -F\Delta t\mathbf{a}_2$, calcule a velocidade do centro de massa e o vetor velocidade angular do corpo imediatamente após a aplicação do impulso, e (c) sendo o impacto não perfeitamente elástico, calcule a perda de energia do sistema devido ao impacto, se no instante 3 a esfera tem velocidade nula. Obs. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base fixa no referencial inercial e não há deslizamento no ponto do impacto.

FIGURA 1

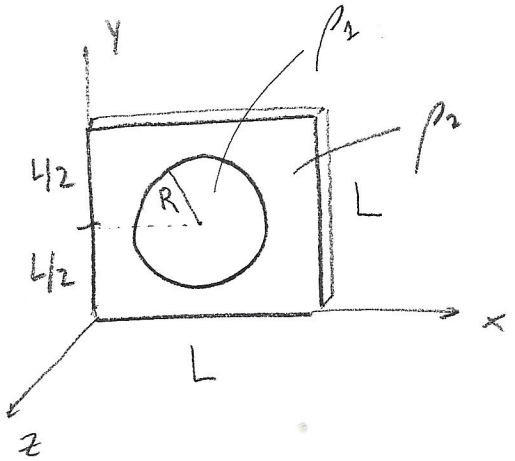
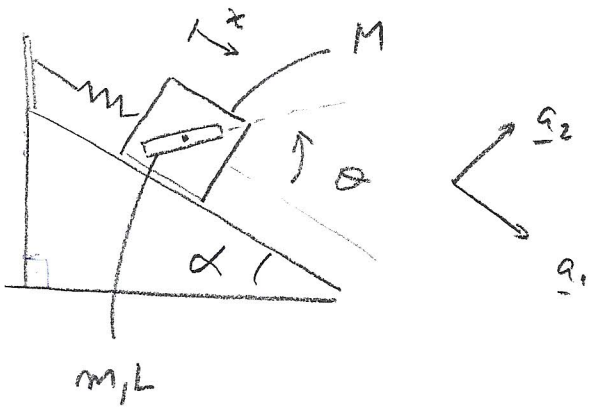


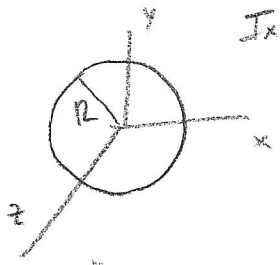
FIGURA 2



TABELA

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

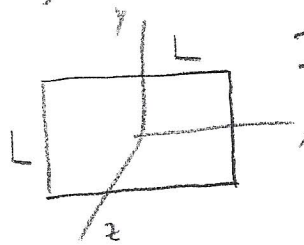
DISCO



$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m R^2$

$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$

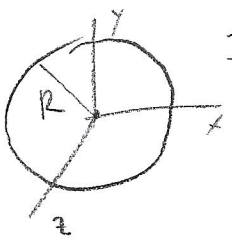
PLACA



$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m L^2$

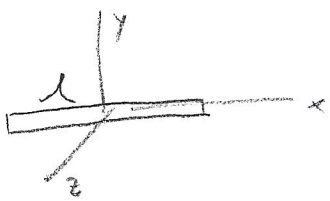
$I_{zz} = \frac{1}{6} m L^2$

ESFERA



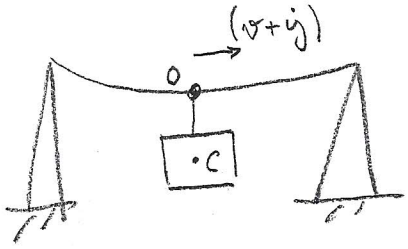
$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m R^2$

BARRA



$I_{xx} = 0 \qquad I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} m \ell^2$

FIGURA 3



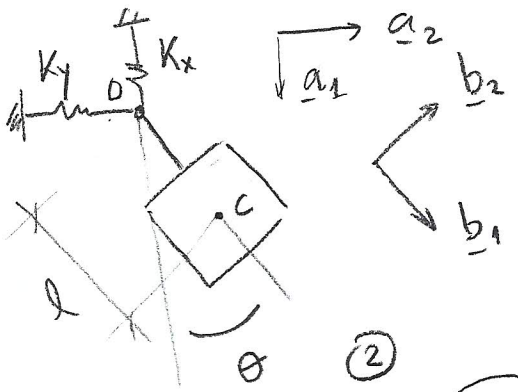
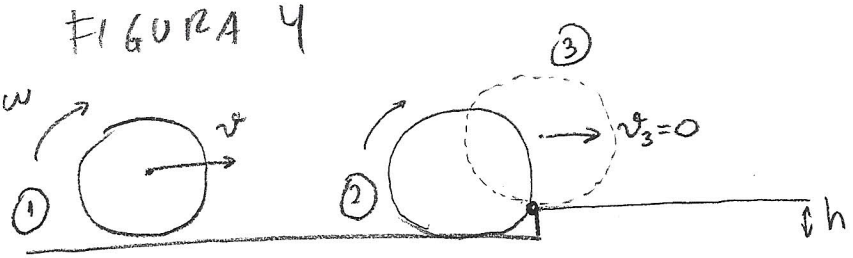
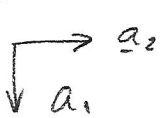
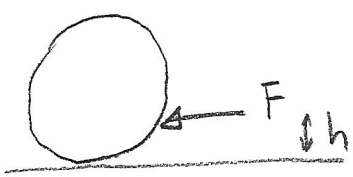


FIGURA 4







P1. 2013.1

$m^P = L^2 t\rho_2$

$m^D = \rho_1 \pi R^2 t$

$m^{D'} = \rho_2 \pi R^2 t$

1) $I_{xx}^{SO} = I_{xx}^{PO} + I_{xx}^{DO} - I_{xx}^{DO'}$

$I_{xx}^{DO} = \frac{1}{4} m^D R^2 + m^D (\underbrace{d_y^2}_{(\frac{L}{2})^2} + d_z^2) = \frac{1}{4} \rho_1 \pi R^2 t (R^2 + L^2)$

$I_{xx}^{DO'} = \frac{1}{4} \rho_2 \pi R^2 t (R^2 + L)$

$I_{xx}^{PO} = \frac{1}{12} m^P L^2 + m^P (d_y^2 + d_z^2) = \frac{1}{12} m^P L^2 + \frac{1}{4} m^P L^2 = \frac{1}{3} L^4 t \rho_2$

$I_{xx}^{SO} = \frac{1}{3} L^4 t \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{1}{4} \pi R^2 t (R^2 + L^2)\right)$

$I_{xy}^{SO} = I_{xy}^{PO} + I_{xy}^{DO} - I_{xy}^{DO'}$

$I_{xy}^{PO} = 0 - m^P d_x d_y = -m^P \frac{L}{4} = -\frac{L^4 t \rho_2}{4}$; $I_{xy}^{DO} = 0 - m^D d_x d_y = -\rho_1 \pi R^2 t \frac{L}{4}$

$I_{xy}^{DO'} = -\rho_2 \pi R^2 t \frac{L}{4}$; $I_{xy}^{SO} = -\frac{L^4 t \rho_2}{4} + (\rho_2 - \rho_1) \pi R^2 t \frac{L}{4}$

2) $L = K - \phi$

$\phi = mgh + K\frac{x}{2}^2$. Quando $x = 0$, $h = 0$:

$\phi = (M+m) g x \operatorname{sen}\alpha + K\frac{x}{2}^2$

$K = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{12} m L \dot{\theta}^2$

$L = (M+m)\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{12} m L \dot{\theta}^2 + (M+m) g x \operatorname{sen}\alpha - K\frac{x}{2}^2$

3) 2 desconsideram. Faltam dados no enunciado.

4) Rola sem deslizar $v = \omega r$ //

a) $K = \frac{M v^2}{2} + \frac{2}{5} M r^2 \omega^2 = \frac{M v^2}{2} + \frac{2}{5} M v^2 = \frac{9}{10} M v^2 = \frac{9}{10} M \omega^2 r^2$

b) $\Delta G = I^{lin} = -F \Delta t$

$M v_2 - M v = -F \Delta t$

$v_2 = v - \frac{F \Delta t}{M}$ (a2)

$\Delta H^{E/CM} = I^{ang.CM}$

$I \omega_2 - I \omega = -F(r-h) \Delta t$

$\omega_2 = \left(\omega + \frac{F(h-r) \Delta t}{(2/5 M r^2)} \right)$ (a3)

c) Como $v_3 = 0$, o corpo não poderia estar rolando (senão, a força de atrito o impulsionaria). Logo, $E_D = mgh = Mgh$

$|\Delta E| = \frac{9}{10} M v^2 - Mgh$