26/11/2012 - P1 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

1) (2,0) Obtenha o momento de inércia I_{yy} e o produto de inércia I_{xy} em relação ao ponto O da estrutura mostrada na Fig. 1, formada por duas placas (A e B) de massa $2m$ e duas barras (C e D) de massa m.

2) (1,5) Calcule o Lagrangeano ($L = K - \Phi$) do sistema mostrado na Fig. 2 em função de θ e $\dot{\theta}$. Considere que o disco de massa m rola sem deslizar e que a mola está na sua posição de equilíbrio em $x = 0$ e $\theta = 0$.

3) (3,0) Obter as equações de movimento de uma pá de uma turbina eólica / helicóptero, modelada por uma barra, para duas situações: (a) um torque constante $\mathbf{T}$ é aplicado conforme mostrado na Fig. 3, gravidade é considerada no sentido negativo de $\mathbf{a}_2$, e o ponto O não se movimenta; (b) o mesmo torque é aplicado e gravidade não é considerada, mas o ponto O pode se movimentar no plano e duas molas lineares (força proporcional ao deslocamento) estão fixadas a ele. A base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ está fixa no referencial inercial e a base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ está fixa na barra de massa m e comprimento l. Para resolver os dois itens dessa questão: (I) faça o DCL e escreva as forças e momentos, (II) calcule as acelerações e (III) obtenha as equações de movimento (n incógnitas $= n$ equações, explicite as incógnitas).

4) (3,5) Uma partícula de massa m e velocidade $v_o\mathbf{a}_1$ impacta um corpo formado por duas barras soldadas de massa m e comprimento l, inicialmente em repouso; veja Fig. 4. Sabendo que o impacto é perfeitamente plástico, pede-se: (a) a velocidade do centro de massa do conjunto (barras e partícula colada) após o impacto, (b) se a localização do centro de massa do conjunto é dada por (x^C, y^C) a partir do ponto O, calcule a velocidade angular do corpo após o impacto em função dessas coordenadas, (c) calcule (x^C, y^C). A base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ está fixa no referencial inercial.

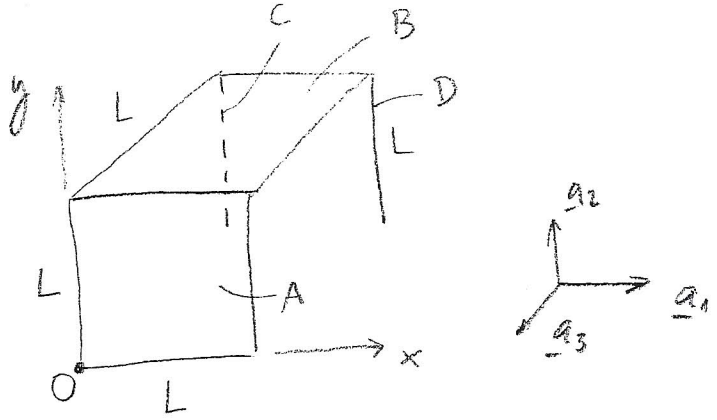
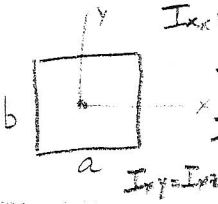


FIGURA 1

TABELA:

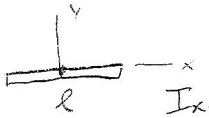


$I_{xx} = \frac{mb^2}{12}$

$I_{yy} = \frac{ma^2}{12}$

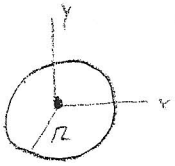
$I_{zz} = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$



$I_{yy} = I_{zz} = \frac{m\ell^2}{12}$

$I_{xx} = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$



$I_{xx} = I_{yy} = mr^2/4$

$I_{zz} = \frac{mr^2}{2}$

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

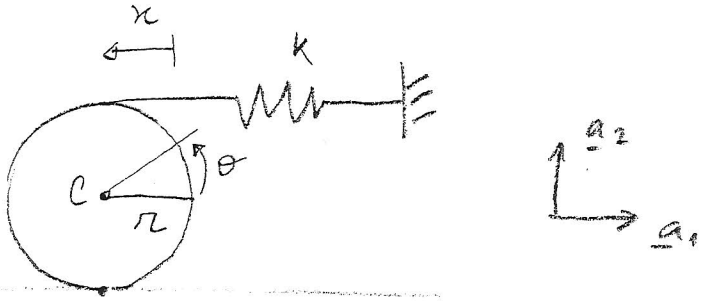


FIGURA 2

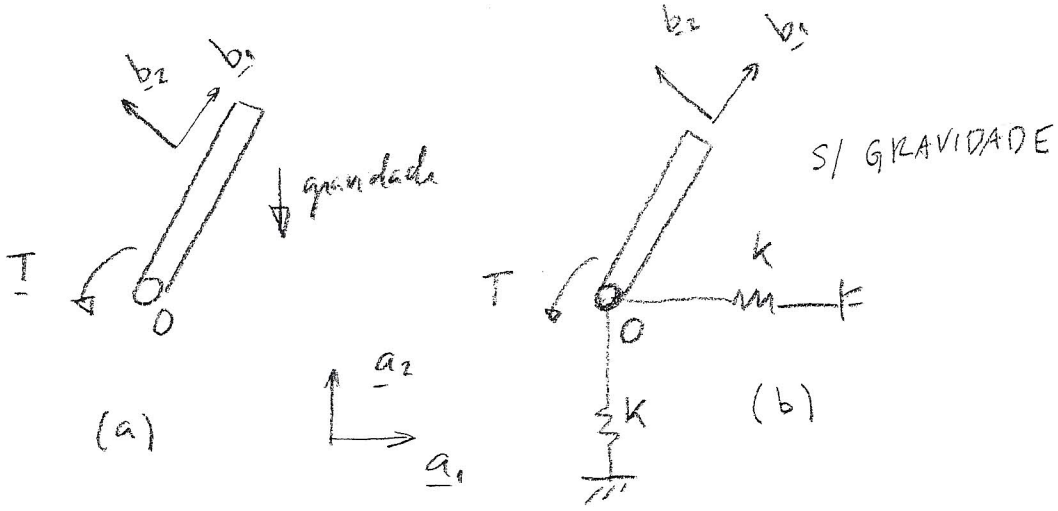


FIGURA 3

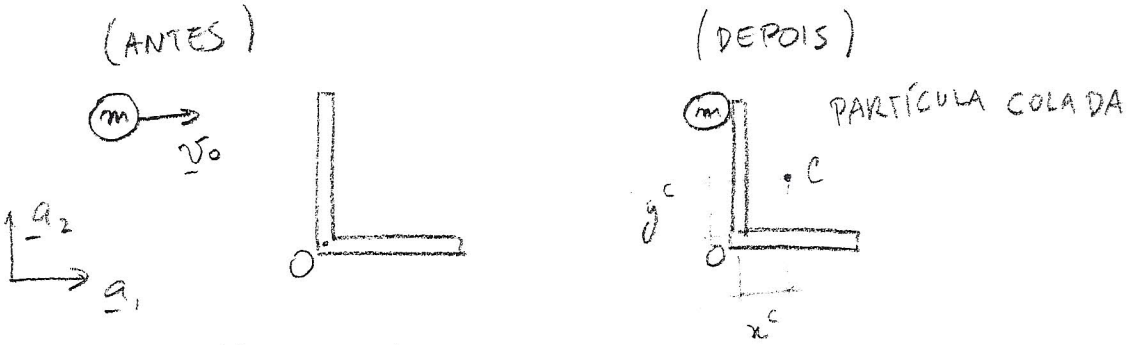


FIGURA 4

P1. 2012-2

1)

$$I_{yy}^{OA} = I_{yy}^{*A} + m(d_x^2 + d_z^2) = \frac{1}{12}(2m)L^2 + 2m\left(0 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

$$I_{yy}^{OB} = I_{yy}^{*B} + m(d_x^2 + d_z^2) = \frac{(2m)}{12}L^2 + 2m\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

$$I_{yy}^{OC} = \underbrace{\cancel{I_{yy}^{*C}}}_{0} + m(d_y^2 + d_z^2) = 0 + mL^2$$

$$I_{yy}^{OD} = 0 + 2mL^2$$

$$I_{xy}^{OA} = I_{xy}^{*A} - m d_x d_y = 0 - 2m\frac{L}{2}\frac{L}{2} = -\frac{mL^2}{2}$$

$$I_{xy}^{OB} = 0 - (2m)\frac{L}{2}L = -mL^2$$

$$I_{xy}^{OC} = 0 - 0 \quad ; \quad I_{xy}^{OD} = -m\frac{L^2}{2}$$

$$I_{yy}^{O} = \sum_i I_{yy}^{i} = 5mL$$

$$I_{xy} = \sum_i I_{xy}^{i} = -2mL$$

2)

$$K = \frac{1}{2} m v^{*T} v^* + \frac{1}{2}\omega^T I \omega$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 r^2 + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\theta}^2$$

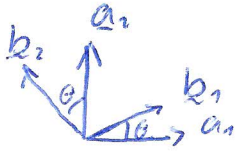
$$V^* = \omega r$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

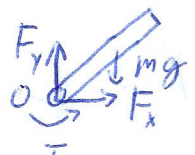
$$x = 2r\theta$$

$$\phi = \frac{Kx^2}{2} \qquad L = K - \phi = \frac{3}{4} m \dot{\theta}^2 r^2 - 2K\theta^2 r^2$$

3)



a) I)



II) $p^{*/o} = \frac{L}{2} b_1$

$^R v^* = \frac{L}{2}\dot{\theta} b_2$

$^R a^* = \frac{L}{2}\ddot{\theta} b_2 - \dot{\theta}^2 \frac{L}{2} b_1$

$I^o = \frac{1}{3} m L^2$

$\alpha = \ddot{\theta}$

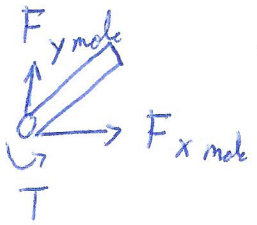
III) $\underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}$ $\qquad \underset{\sim}{F} = F_x\,\underset{\sim}{a}_1 + F_y\,\underset{\sim}{a}_2 - P\,a_2$

$M^{F/O} = I^{O}\alpha \Leftrightarrow$ movimento no plano $\quad M^{F/O} = T - mg\cos\theta\,\frac{L}{2}$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a} \\ \text{e} \\ M^{F/O} = I^{O}\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} F_x = m\left(-\ddot{\theta}L/2\,\text{sen}\,\theta - \dot{\theta}^2 L/2\cos\theta\right) \\ F_y - mg = m\left(\ddot{\theta}L/2\cos\theta - \dot{\theta}^2 L/2\,\text{sen}\,\theta\right) \\ T - mg\cos\theta\,\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} \end{cases}$$

3 eqs e 3 incógnitas $\{\theta, F_x, F_y$

b) I)



$\underset{\sim}{F} = F_{x\,m}\,\underset{\sim}{a}_1 + F_{y\,m}\,\underset{\sim}{a}_2$

$\underset{\sim}{M}^{F/C} = T\,\underset{\sim}{a}_3 + F_{mx}\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{a}_3 - F_{my}\frac{L}{2}\cos\theta\,\underset{\sim}{a}_3$

II) ${}^{R}\underset{\sim}{a}^{C} = {}^{R}a^{O} + \omega\times(\omega\times r^{C/O}) + \alpha\times r^{C/O}$ $\qquad I^{C} = \frac{1}{12}mL^2$

${}^{R}\underset{\sim}{a}^{C} = \ddot{x}\,\underset{\sim}{a}_1 + \ddot{y}\,\underset{\sim}{a}_2 + \ddot{\theta}\frac{L}{2}\,\underset{\sim}{b}_2 - \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\,\underset{\sim}{b}_1$ $\qquad \alpha = \ddot{\theta}\,\underset{\sim}{a}_3$

III) $\underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}$

$$\left.\begin{cases} -Kx = m\left(\ddot{x} - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta - \dot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta\right) \\ -Ky = m\left(\ddot{y} + \ddot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta - \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta\right) \\ M = I\alpha \Rightarrow T - \frac{L}{2}Kx\,\text{sen}\,\theta + \frac{L}{2}Ky\cos\theta = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} \end{cases}\right\} \text{3 eqs e 3 incógnitas } \{x, y, \theta\}$$

4) a) $\Delta G = 0$

$m\,{}^{R}\underset{\sim}{V}^{P} = 3m\,{}^{R}\underset{\sim}{V}^{*}$

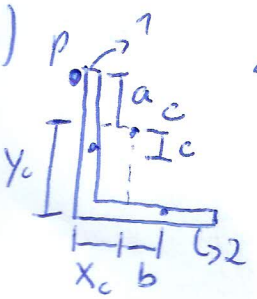
${}^{R}\underset{\sim}{V}^{*} = \frac{1}{3}V_0\,\underset{\sim}{a}_1$

$I^{P} = m\left[x^{c2} + (L - y^{c})^2\right]$ $\quad y^{c} = \left(m.0 + m\left(\frac{L}{2}\right) + mL\right)\frac{1}{3m}$

$I^{1}_{33} = m\left[(x^{c})^2 + \left(y^{c} - \frac{L}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}mL^2$ $\quad y^{c} = \frac{1}{2}L$

$I^{2}_{33} = m\left[(y^{c})^2 + (L/2 - x^{c})^2\right] + \frac{1}{12}mL^2$

b)



$\Delta \underset{\sim}{H}^{c} = 0$

$-mV_0(L - y_c) = -I_{33}\omega$ $\qquad \omega = \frac{V_0(L - y^{c})}{I_{33}}$

$I_{33} = I^{P}_{33} + I^{1}_{33} + I^{2}_{33}$

c) $x^{c} = \left(m\left(\frac{L}{2}\right) + m.0 + m.0\right)\frac{1}{3m} = \frac{L}{6}$