18/04/2012 - P1 DIN2 - Prof. Thiago Ritto

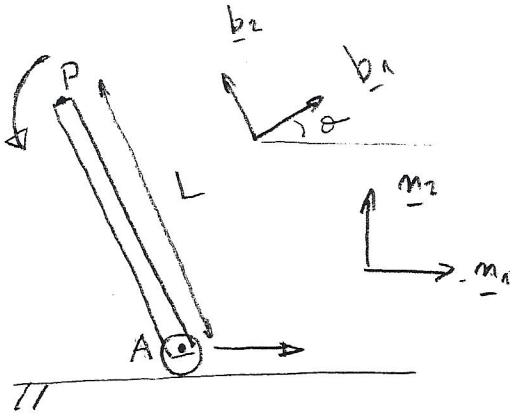
Considere todos os pedidos no referencial inercial.

1) (2,5) Considere a barra de comprimento L e massa m mostrada na Fig. 1. A base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ está fixa no referencial inercial e a base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ está fixa na barra. A barra (livre para girar em torno do ponto A) está ligada a um disco de massa desprezível que se movimenta na direção $\mathbf{n}_1$. Calcule (a) a aceleração do ponto P (na base B) e (b) a energia cinética da barra quando $\mathbf{a}^A = a\mathbf{n}_1$ (aceleração do ponto A), $\boldsymbol{\alpha} = +\alpha\mathbf{n}_3$ (vetor aceleração angular da barra), $\mathbf{v}^A = v\mathbf{n}_1$ (velocidade do ponto A) e $\boldsymbol{\omega} = +\omega\mathbf{n}_3$ (vetor velocidade angular da barra).

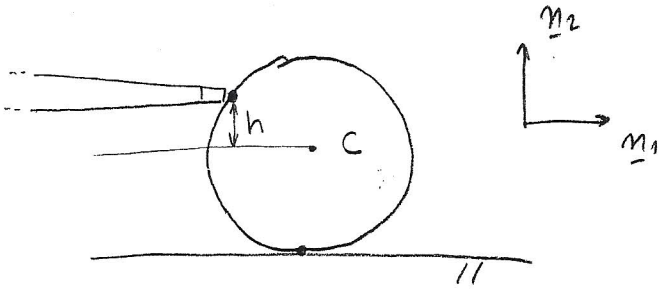
2) (2,0) Considere a bola de sinuca de raio r e massa m (inicialmente parada) mostrada na Fig. 2; ela está sendo golpeada por um taco. (a) Faça o diagrama de corpo livre da bola mostrando as forças que atuam sobre ela. Se a força de impacto vale F e o tempo de impacto é Δt calcule (b) a velocidade do centro de massa logo após o impacto, e (c) a altura h acima do seu centro de massa C que a bola deve ser golpeada para começar a rolar sem deslizar. Obs. A base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ está fixa no referencial inercial.

3) (2,5) Considere o sistema formado por três corpos soldados uns aos outros: duas barras de comprimento L e massa m e um disco de diâmetro L e massa 2m; conforme mostrado na Fig. 3. Calcule Iyy e Ixy do sistema em relação ao ponto O.

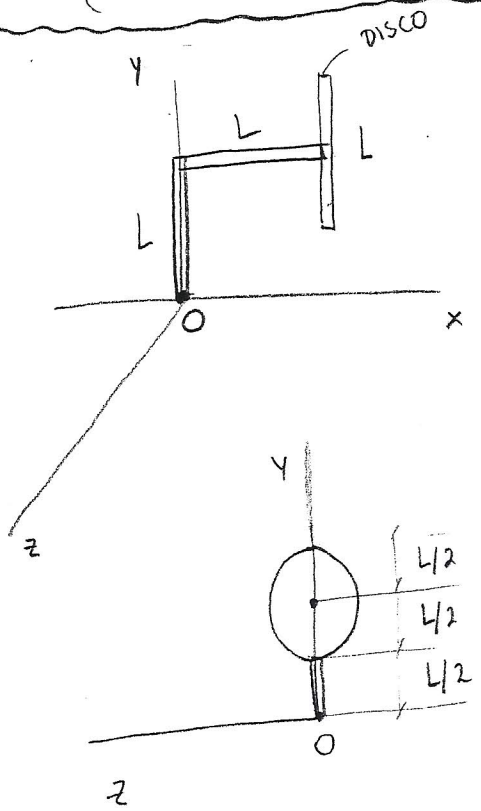
4) (3,0) O componente mecânico ilustrado na Fig. 4 é modelado como sendo equivalente a duas esferas de massa m conectadas por uma barra rígida (de massa desprezível) de comprimento L. O componente mecânico se movimenta sobre um plano horizontal sem atrito (gravidade na direção negativa de z) de tal forma que a esfera B movimenta-se ao longo do eixo Y e conecta-se através de uma mola linear de rigidez k. Sobre a esfera A atua a força externa $\mathbf{F} = F\mathbf{n}_2$, e quando a esfera B encontra-se na origem do sistema de coordenadas, a mola está na sua posição de equilíbrio. (a) faça o diagrama de corpo livre do sistema (no plano X,Y) e escreva o vetor com as forças e momentos que atuam no sistema, (b) calcule a aceleração do centro de massa do sistema, (c) obtenha as equações de movimento no plano (X,Y) (lembre-se que número de incógnitas tem que ser igual a número de equações). Obs. A base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ está fixa no referencial inercial e a base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ está fixa na barra.



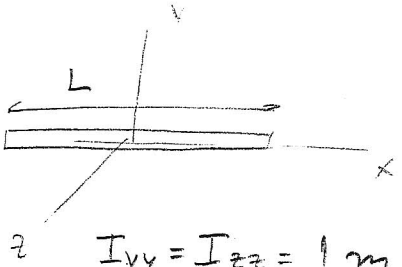
(FIGURA 1)



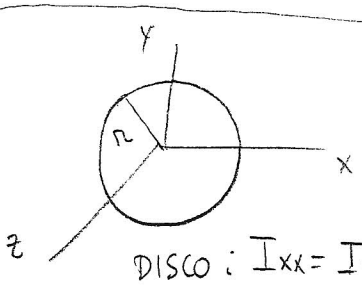
(FIGURA 2)



(FIGURA 3)



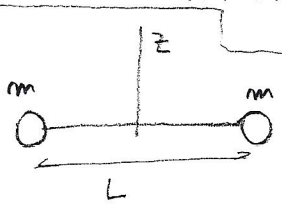
$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} m L^2$$



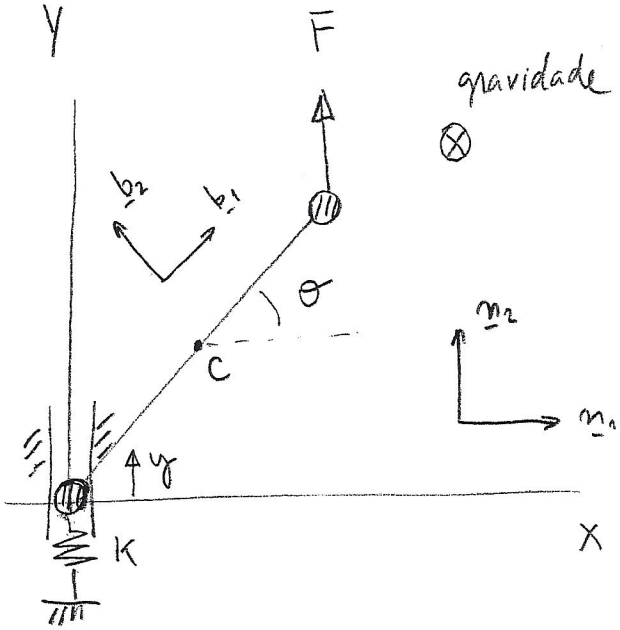
DISCO: $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2$

$I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$

ESFERA: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m r^2$



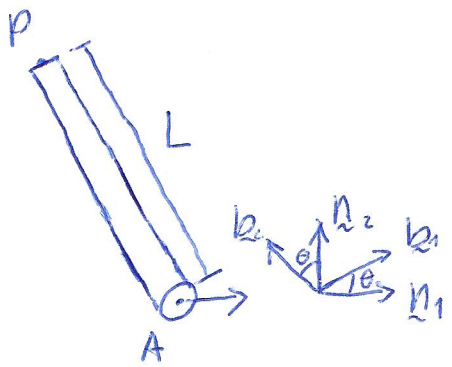
$$I_{zz} = \frac{1}{2} m L^2$$



(FIGURA 4)

P1 2012.1

1) a)



a) $^{R}a^{P} = {}^{R}a^{a} + {}^{R}\omega^{B} \times ({}^{R}\omega^{B} \times p^{P/A}) + {}^{R}\alpha^{B} \times p^{P/A}$

$^{R}a^{a} = a\,\underset{\sim}{n}_1 = a\cos\theta\,\underset{\sim}{b}_1 - a\,\text{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{b}_2$

$^{R}\alpha^{B} = \alpha\,\underset{\sim}{n}_3 = \alpha\,\underset{\sim}{b}_3$

$^{R}V^{A} = V\,\underset{\sim}{n}_1$

$^{R}\omega^{B} = \omega\,\underset{\sim}{n}_3 = \omega\,\underset{\sim}{b}_3$

$p^{P/A} = L\,\underset{\sim}{b}_2 = L\,\text{sen}\,\theta\,\underset{\sim}{n}_1 + L\cos\theta\,\underset{\sim}{n}_2$

$$^{R}a^{P} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ -a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 L \\ 0 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} -\alpha L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a\cos\theta - \alpha L \\ -a\,\text{sen}\,\theta - \omega^2 L \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

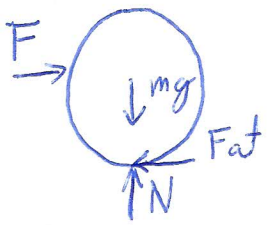
b) $K = \frac{1}{2} m\,{}^{R}V^{*T} \cdot {}^{R}V^{*} + \frac{1}{2}\omega^T [I^*]\omega$

$$^{R}V^{*} = {}^{R}V^{a} + \omega \times \underbrace{p^{*/r}}_{\frac{L}{2}\underset{\sim}{b}_2} = \begin{pmatrix} V\cos\theta \\ -V\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} -\frac{\omega L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \left(V\cos\theta - \frac{\omega L}{2}, -V\,\text{sen}\,\theta, 0\right)_B$$

$$K = \frac{1}{2} m \underbrace{\left(V^2\cos^2\theta + \frac{\omega^2 L^2}{4} - \omega V L\cos\theta + V^2\,\text{sen}^2\theta\right)}_{V^2 + \frac{\omega^2 L^2}{4} - \omega V L\cos\theta} + \frac{1}{2} I_{zz}\,\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m\left(V^2 + \frac{\omega^2 L^2}{4} - \omega V L\cos\theta\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m\,{}^{2}\,\omega^2$$

2) a)



b) $I^{lin} = \Delta G = m\left({}^{R}V_2^{*} - \cancel{{}^{R}V_1^{*}}\right)$ 0

$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt = m\,{}^{R}V_2^{*} \Rightarrow F(t_1 - t_0) = m\,{}^{R}V^{*}$

$^{R}V^{*} = \frac{F\,\Delta t}{m}$

c) Condição de não deslizamento: ${}^{R}V_2^{*} = {}^{R}\omega_2^{B}\, r$

$$\underset{\sim}{I}^{ang} = \Delta \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_2 - \cancel{H_1}^{\,0}$$

$$\int \underset{\sim}{F} \times \underset{\sim}{h}\, dt = \underset{\sim}{H}_2 = I\omega$$

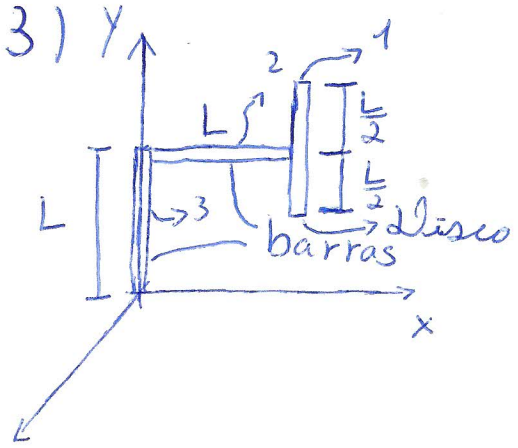
$$F h \Delta t = I\omega = \frac{2}{5} m r^2 \omega$$

$$F h \Delta t = \frac{2}{5} m r \frac{{}^{R}V_2^{*2}}{r}$$

$$h = \frac{2}{5}\frac{m r\, {}^{R}V_2^{*}}{F\Delta t} = \frac{2}{5}\frac{m r\, {}^{R}V_2^{*}}{m\, {}^{R}V_2^{*}}$$

$$h = \frac{2}{5} r$$

3)



$$I_{yy}^{*1} = \frac{1}{4}(2m)\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{yy}^{*2} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$I_{yy}^{*3} = 0$$

$$I_{xy}^{*1} = I_{xy}^{*2} = I_{xy}^{*3} = 0$$

$$I_{xy}^{01} = -2 m L^2$$

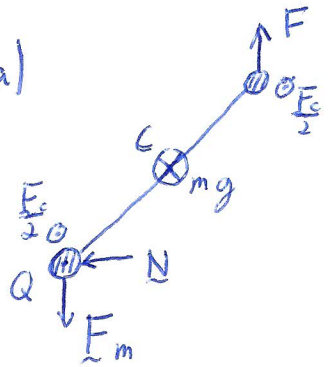
$$I_{xy}^{02} = -m L \frac{L}{2}$$

$$I_{xy}^{03} = -m\, 0 \frac{L}{2} = 0$$

$$I_{yy}^{01} = \frac{1}{8} m L^2 + 2m(L^2 + 0)\,;\quad I_{yy}^{02} = \frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L^2}{4} + 0\right);\quad I_{yy}^{03} = 0 + m(0+0) = 0$$

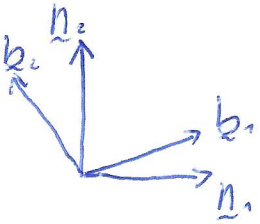
$$I_{yy}^{S/O} = \frac{59}{24} m L^2\,;\quad I_{xy}^{S/O} = -\frac{5}{2} m L^2$$

4) a)



$$\underset{\sim}{F} = (F - F_m)\underset{\sim}{n}_2 - N\underset{\sim}{n}_1 + (F_c - mg)\underset{\sim}{n}_3$$

$$\underset{\sim}{M}^{F/C} = (F\cos\theta + F_m\cos\theta - N\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{L}{2}\underset{\sim}{n}_3$$



$${}^{R}\underset{\sim}{a}^{C} = {}^{R}\underset{\sim}{a}^{Q} + \omega \times (\omega \times p^{C/Q}) + \alpha \times p^{C/Q}$$

$$\omega = \dot\theta\, \underset{\sim}{b}_3$$

$$p^{C/Q} = \frac{L}{2}\underset{\sim}{b}_1$$

b) $${}^{R}\underset{\sim}{a}^{C} = \ddot{y}\,\underset{\sim}{n}_2 - \dot\theta\frac{L}{2}\underset{\sim}{b}_1 + \ddot\theta\frac{L}{2}\underset{\sim}{b}_2 = \left(-\cos\theta\,\dot\theta^2\frac{L}{2} - \ddot\theta\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\underset{\sim}{n}_1 +$$

$$+\left(\ddot{y} - \mathrm{sen}\,\theta\,\dot\theta^2\frac{L}{2} + \cos\theta\,\ddot\theta\frac{L}{2}\right)\underset{\sim}{n}_2$$

c) $$\underset{\sim}{F} = m\,{}^{R}\underset{\sim}{a}^{C}$$

$$-N = 2m\left(-\cos\theta\,\dot\theta\frac{L}{2} - \ddot\theta\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$F - Ky = 2m\left(\ddot{y} - \dot\theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{L}{2} + \cos\theta\,\ddot\theta\frac{L}{2}\right)$$

$$F_c = mg$$

$$\underbrace{\dot{H} = I\alpha = M^{F/C}}_{\text{mov. no plano}}$$

$$\frac{1}{2} m L^2 \ddot\theta = (F\cos\theta + Ky\cos\theta - N\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{L}{2}$$

4 incógnitas (N, θ, y, F_c) e 4 equações