

# Dinâmica de um Pião

Aluno: Exemplo Modelo

Dinâmica 2, 2014.2, Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ

# 1 O problema

A Fig. 1 mostra o problema que será tratado: um pião, que realiza um movimento no espaço 3D, <http://escrevimentosagno.blogspot.fr>.



Figura 1: Foto de um pião em movimento.

## 2 Referenciais e bases

Considere o desenho esquemático do pião mostrado na Fig. 2. O ponto  $O$  está fixo e o centro de massa (CM) do corpo está localizado no ponto  $C$ . Os referenciais considerados nesta análise (ver Fig. 2) são:  $A$  (inercial),  $B$ ,  $C$ , e  $D$  (solidário ao pião). A base  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  é solidária ao referencial  $A$ , a base  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  é solidária ao referencial  $B$ , e assim por diante.

A partir de uma posição inicial do pião (ver Fig. 2), a parametrização dos ângulos é a seguinte:  $\phi$  (precessão) representa uma rotação positiva em torno do eixo  $\mathbf{a}_2$ ,  $\theta$  (nutação) representa uma rotação positiva em torno do eixo  $\mathbf{b}_3$ , e  $\psi$  (spin) representa uma rotação positiva em torno do eixo  $\mathbf{c}_2$ .

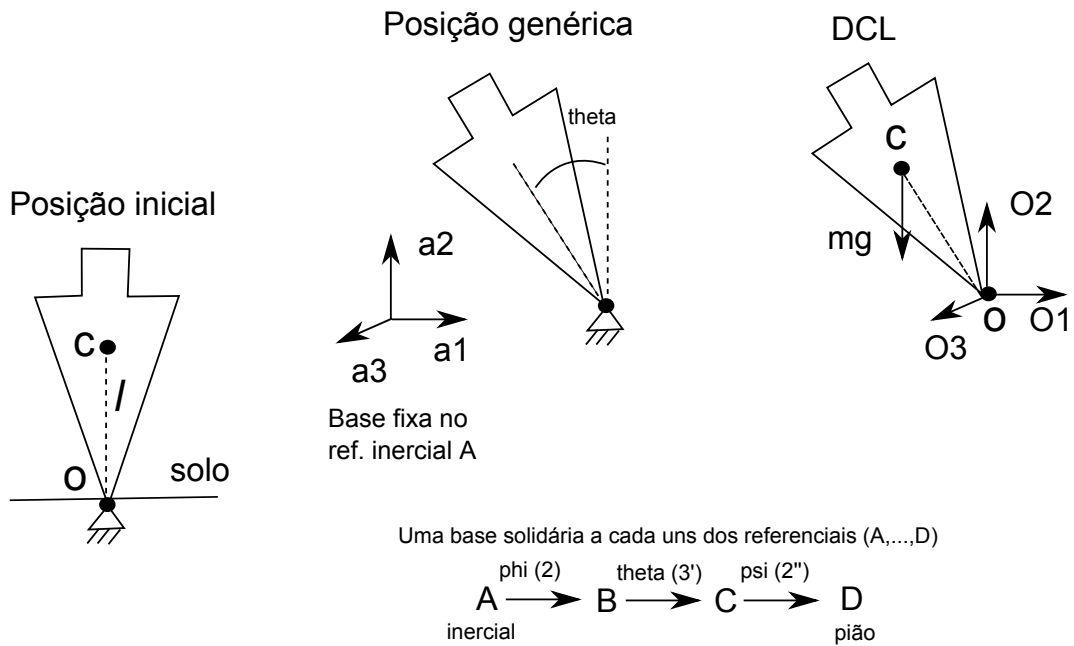


Figura 2: Desenho do pião, diagrama de corpo livre, e referenciais.

### 3 Matrizes de transformação

A matriz de transformação  $[{}_A T_B]$  transforma um vetor escrito na base  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  para a base  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ , a matriz de transformação  $[{}_B T_C]$  transforma um vetor escrito na base  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  para a base  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , e a matriz de transformação  $[{}_C T_D]$  transforma um vetor escrito na base  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  para a base  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ . Lembrando que a operação inversa  $[{}_B T_A] = [{}_A T_B]^{-1} = [{}_A T_B]^T$ .

$$[{}_A T_B] = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$[{}_B T_C] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$[{}_C T_D] = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3)$$

## 4 Hipóteses simplificadores

Considera-se que o vínculo no ponto  $O$  é uma rótula, e que não há atrito, ou seja, o torque de reação em  $O$  é zero. A interação entre o corpo do pião e o solo não é modelada, de forma que o ângulo  $\theta$  não pode ultrapassar um valor limite (que depende da geometria do pião). É dada uma condição inicial de posição e velocidade,  $\{\phi_0, \theta_0, \psi_0\}$  e  $\{\dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\psi}_0\}$ , e, além das forças de reação no ponto  $O$  e do peso, nenhuma outra força (ou torque) age no sistema.

## 5 Inércia e geometria

A distância entre o ponto  $O$  e  $C$  é  $l$ , o pião tem massa  $m$ , e o tensor de inércia, em relação ao ponto  $O$ , é conhecido :

$$[I^O] = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (4)$$

Este tensor é o mesmo considerando as bases  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  e  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  graças à axissimetria do corpo em relação ao eixo  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{d}_2$ .

Observe que o ponto  $O$ , que pertence ao corpo e não se move, é usado como referência. Essa escolha é proposital para evitar que as forças do ponto  $O$  apareçam nas equações dos momentos.

## 6 Diagrama de corpo livre

O diagrama de corpo livre é mostrado na Fig. 2. A força resultante e o momento resultante em relação ao ponto  $O$  são escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = O_1 \mathbf{a}_1 + O_2 \mathbf{a}_2 + O_3 \mathbf{a}_3 - mg \mathbf{a}_2. \quad (5)$$

$$\mathbf{M}^O = mgl \sin \theta \mathbf{c}_3. \quad (6)$$

Outra opção seria escrever as forças alinhadas à base solidária a  $C$ . O preço a pagar é a transformação da força da gravidade para a base solidária a  $C$ :

$$\mathbf{F} = O'_1 \mathbf{c}_1 + O'_2 \mathbf{c}_2 + O'_3 \mathbf{c}_3 - [{}^C T_B][{}^B T_A](mg \mathbf{a}_2). \quad (7)$$

## 7 Cinemática

O vetor velocidade angular do pião (referencial D) em relação ao referencial inercial é dado por

$$\begin{aligned} {}^A\boldsymbol{\omega}^D &= [{}^C T_B](\dot{\phi}\mathbf{b}_2) + \dot{\psi}\mathbf{c}_2 + \dot{\theta}\mathbf{c}_3 = \\ &= \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{c}_1 + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{c}_2 + \dot{\theta}\mathbf{c}_3. \end{aligned} \quad (8)$$

A velocidade do centro de massa do pião em relação ao referencial inercial pode ser escrita como

$${}^A\mathbf{v}^C = \frac{{}^A d}{{}^A dt}(\mathbf{r}^{C/O}) = {}^A\boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{r}^{C/O}, \quad (9)$$

onde foi usado o vetor velocidade angular do referencial C em relação ao referencial A

$${}^A\boldsymbol{\Omega}^C = \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{c}_1 + \dot{\phi}\cos\theta\mathbf{c}_2 + \dot{\theta}\mathbf{c}_3, \quad (10)$$

e  $\mathbf{r}^{C/O} = l\mathbf{c}_2$ . A aceleração do centro de massa é dada por:

$${}^A\mathbf{a}^C = {}^A\boldsymbol{\Omega}^C \times ({}^A\boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{r}^{C/O}) + {}^A\boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{C/O}, \quad (11)$$

onde

$${}^A\boldsymbol{\alpha}^C = \frac{{}^A d}{{}^A dt}({}^A\boldsymbol{\Omega}^C). \quad (12)$$

Vamos calcular as componentes da aceleração na mesma solidária ao referencial A. Em seguida, calcularemos na base solidária ao referencial C.

$$\mathbf{r}^{C/O} = [{}^A T_B][{}^B T_C](l\mathbf{c}_2) = -l\sin\theta\cos\phi\mathbf{a}_1 + l\cos\theta\mathbf{a}_2 + l\sin\theta\sin\phi\mathbf{a}_3, \quad (13)$$

logo

$$\mathbf{v}^C = (-l\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)\mathbf{a}_1 - l\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{a}_2 + (l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)\mathbf{a}_3. \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^C = & (-\ddot{\theta} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \phi + l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + l\ddot{\phi} \sin \theta \sin \phi + \\ & + l\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \phi + l\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi) \mathbf{a}_1 - (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \mathbf{a}_2 + (l\ddot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \\ & - \dot{\theta}^2 \sin \theta \sin \phi + l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + l\ddot{\phi} \sin \theta \cos \phi - l\dot{\phi}^2 \sin \theta \sin \phi + l\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi) \mathbf{a}_3 . \end{aligned} \quad (15)$$

simplificando

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^C = & (-\ddot{\theta} \cos \theta \cos \phi + (\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2) \sin \theta \cos \phi + 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + l\ddot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \mathbf{a}_1 + \\ & - (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \mathbf{a}_2 + (l\ddot{\theta} \cos \theta \sin \phi - (\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2) \sin \theta \sin \phi + \\ & + 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + l\ddot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \mathbf{a}_3 . \end{aligned} \quad (16)$$

Agora, a aceleração do centro de massa do pião será calculada na base solidária a C. Ao invés de usar as matrizes de transformação (geraria muitas contas!), usaremos os teoremas cinemáticos.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{v}^C} = {}^A \boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{r}^{C/O} = -l\dot{\theta} \mathbf{c}_1 + l\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{c}_3 , \quad (17)$$

Calculando

$$\begin{aligned} {}^A \boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{r}^{C/O} &= -l\dot{\theta} \mathbf{c}_1 + l\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{c}_3 \\ {}^A \boldsymbol{\Omega}^C \times ({}^A \boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{r}^{C/O}) &= \dot{\phi}^2 l \cos \theta \sin \theta \mathbf{c}_1 - (\dot{\phi}^2 l \sin^2 \theta + l\dot{\theta}^2) \mathbf{c}_2 + \dot{\phi}\dot{\theta} l \cos \theta \mathbf{c}_3 \\ {}^A \boldsymbol{\alpha}^C &= (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{c}_1 + (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{c}_2 + \ddot{\theta} \mathbf{c}_3 \\ {}^A \boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{C/O} &= -l\ddot{\theta} \mathbf{c}_1 + l(\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{c}_3 , \end{aligned} \quad (18)$$

podemos obter a aceleração do centro de massa do pião na base solidária a C:

$$\begin{aligned} {}^A \mathbf{a}^C &= {}^A \boldsymbol{\Omega}^C \times ({}^A \boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{r}^{C/O}) + {}^A \boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{C/O} = \\ &= l(\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{\theta}) \mathbf{c}_1 - l(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \mathbf{c}_2 + l(2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\phi} \sin \theta) \mathbf{c}_3 \end{aligned} \quad (19)$$

## 8 Equações de movimento - Newton/Euler

Como a massa é constante, tem-se:

$$\mathbf{F} = m {}^A \mathbf{a}^C \quad (20)$$

e

$$\mathbf{M}^O = \frac{A d}{dt}([I^O]^A \boldsymbol{\omega}^D) \quad (21)$$

A equação da 2a lei de Newton fica:

$$O_1 = m(-l\ddot{\theta} \cos \theta \cos \phi + (l\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2) \sin \theta \cos \phi + 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + l\ddot{\phi} \sin \theta \sin \phi)$$

$$O_2 - mg = -m(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$O_3 = m(l\ddot{\theta} \cos \theta \sin \phi - (l\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2) \sin \theta \sin \phi + 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + l\ddot{\phi} \sin \theta \cos \phi) .$$

(22)

Essas 3 equações não podem ser resolvidas pois existem 6 incógnitas:  $\{\phi, \theta, \psi, O_1, O_2, O_3\}$ . As 3 equações que estão faltando são obtidas usando a lei de Euler.

A equação dos momentos pode ser escrita da forma compacta a seguir, pois o tensor de inércia é constante na base solidária a C, e o corpo é axisimétrico em relação ao último giro  $\phi$ :

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{zz}\omega_z\Omega_y - I_{yy}\omega_y\Omega_z \\ M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{xx}\omega_x\Omega_z - I_{zz}\omega_z\Omega_x \\ M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + I_{yy}\omega_y\Omega_x - I_{xx}\omega_x\Omega_y \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $M_x = M_y = 0$ ,  $M_z = mgl \sin \theta$ ,  $I_{xx} = I_{zz} = I$ ,  $I_{yy} = I_y$ ,  $\dot{\omega}_x = \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta$ ,  $\dot{\omega}_y = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta$ , and  $\dot{\omega}_z = \dot{\theta}$ . Substituindo:

$$\begin{aligned} 0 &= I(\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) + I\dot{\theta}(\dot{\phi} \cos \theta) - I_y(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\dot{\theta} \\ 0 &= I_y(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta) + I(\dot{\phi} \sin \theta)\dot{\theta} - I\dot{\theta}(\dot{\phi} \sin \theta) \\ mgl \sin \theta &= I\ddot{\theta} + I_y(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)(\dot{\phi} \sin \theta) - I(\dot{\phi} \sin \theta)(\dot{\phi} \cos \theta) . \end{aligned} \quad (24)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} 0 &= I\ddot{\phi} \sin \theta - I_y\dot{\psi}\dot{\theta} + (2I - I_y)\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 &= I_y(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta) \\ mgl \sin \theta &= I\ddot{\theta} + I_y\dot{\psi}\dot{\phi} \sin \theta + (I_y - I)\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta . \end{aligned} \quad (25)$$

Observe que essas 3 equações podem ser resolvidas independente das equações da lei de Newton. Isso porque o ponto  $O$  foi usado como referência e as reações  $\{O_1, O_2, O_3\}$  não aparecem nas expressões acima.

## 9 Equações de movimento - Lagrange

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (26)$$

onde  $L = K - \Phi$ ,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas, e  $Q_i$  são as forças generalizadas.

Definindo o solo como nível zero para a energia potencial gravitacional, tem-se:

$$\Phi = mgl \cos \theta. \quad (27)$$

A energia cinética pode ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2} ({}^A \boldsymbol{\omega}^D)^T [I^O] {}^A \boldsymbol{\omega}^D = \frac{1}{2} (I \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + I_y (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + I \dot{\theta}^2). \quad (28)$$

As coordenadas generalizadas são  $q_1 = \phi$ ,  $q_2 = \theta$  e  $q_3 = \psi$  e  $Q = 0$ , pois há nenhuma força que realize trabalho (excluindo a força da gravidade, que é levada em conta na energia potencial). Calculando os termos individualmente, temos:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_y \dot{\psi} \cos \theta + I_y \dot{\phi} \cos^2 \theta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= I\dot{\theta} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_y \dot{\psi} + I_y \dot{\phi} \cos \theta \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= I\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2I\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + I_y \ddot{\psi} \cos \theta - I_y \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\
&\quad + I_y \ddot{\phi} \cos^2 \theta - 2I_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= I\ddot{\theta} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= I_y \ddot{\psi} + I_y \ddot{\phi} \cos \theta - I_y \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \\
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= I\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_y \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta - I_y \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta + mgl \sin \theta \\
\frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Juntando os termos, as equações relacionadas a  $\psi$  e  $\theta$  ficam:

$$\begin{aligned}
I\ddot{\theta} &= (I - I_y)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_y \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + mgl \sin \theta \\
I_y(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) &= 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

que são idênticas às duas últimas expressões da Eq. (25), obtidas usando a Lei de Euler. A equação relacionada à  $\phi$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
&I_y \cos \theta (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) + \\
&\sin \theta (I\ddot{\phi} \sin \theta + 2I\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - I_y \dot{\psi} \dot{\theta} - I_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

usando a segunda expressão da Eq. (30), pode-se zerar o primeiro termo da equação acima, e chegar-se a:

$$I\ddot{\phi} \sin \theta + 2I\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - I_y \dot{\psi} \dot{\theta} - I_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta = 0, \tag{32}$$

que é idêntica à primeira expressão da Eq. (25).