Prova de Álgebra Linear

Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema. Depois faça as contas.

1) (3,0 pontos) Faça uma parte da decomposiçao em valores singulares ($A = U\Sigma V^T$) da matriz A. Encontre U e Σ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) (1,0 ponto) Calcule uma base para a imagem de A e uma base para o núcleo de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3) (1,0 ponto) Dada a base {(1,1,1),(1,2,3)}, use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal.

4) (2,0 ponto) Sejam três operadores A, B e C ($T : V \to V$). (a) Podemos afirmar que a dimensão do núcleo de BC é maior do que a dimensão do núcleo de ABC? Justifique. (b) Se $V = \mathbb{R}^{10}$ e A tem dois autovalores iguais a zero, qual é a dimensão da imagem de A? (c) Se Q é uma matriz ortogonal e A é uma matriz simétrica, podemos afirmar que $D = Q^{-1}AQ$ é simétrica? Justifique.

5) (3,0 pontos) Diga que vetor, $b_1 = (1, 10, 1)$ ou $b_2 = (10, -1, 1)$, está mais próximo (no sentido dos mínimos quadrados) do subespaço gerado pelas colunas da matriz A do exercício ~~anterior~~.

(1)

AL GABARITO 2011.2

1. $A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

$U_{3\times3}\,\Sigma_{3\times2}\,V^T_{2\times2}$

$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. p/ achar $u_1\, u_2\, u_3$ usamos $\lambda's = (0,2,4)$

$\lambda = 0$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \div \sqrt{2}$

$\lambda = 2$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \div \sqrt{2}$

$\lambda = 4$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. $$e_1 = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1}{\| v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 \|} = \frac{(1-1/\sqrt{3},\ 2-1/\sqrt{3},\ 3-1/\sqrt{3})}{\|(1-1/\sqrt{3},\ 2-1/\sqrt{3},\ 3-1/\sqrt{3})\|}$$

4. a) $BCx = 0$

Se $x \in \mathrm{Ker}(BC) \longrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, ABC$ pois

$A \underbrace{BCx}_{0} = 0$. Logo $\mathrm{Dim}\, \mathrm{Ker}(BC) \leq \mathrm{Ker}(ABC)$

b) $V = \mathbb{R}^{10}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \longrightarrow \mathrm{rank}\, A = 10 - 2 = 8$

$\dim \mathrm{Im} A = \mathrm{rank}\, A = 8$

c) $D = Q^{-1} A Q = Q^T A Q$

$D^T = Q^T A^T Q = Q^T A Q$ μ $A^T = A$ $\|$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rank = 2

base p/ Im A $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\dim Ker(A) = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base p/ Ker(A)

5 $\quad e_1 = A\hat{x}_1 - b_1 \qquad \hat{x}_1 \longrightarrow A^TA\hat{x}_1 = A^Tb_1$

$e_2 = A\hat{x}_2 - b_2 \qquad \hat{x}_2 \longrightarrow A^TA\hat{x}_2 = A^Tb_2$

$A^TA = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{x}_1 = (1/2, -11/2)$ $\quad \hat{x}_2 = (5, 0)$

Logo

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11/2 \\ 11/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|e_1\|^2 = 40{,}5 > \|e_2\|^2 = 2$

b_2 está bem mais próximo!

COPPE UFRJ

Prova de Álgebra Linear (31/07/2013)
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema, depois faça as contas.

1) (2.0) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mostrada abaixo. (a) Obtenha Σ e V da decomposição $A = U\Sigma V^T$. (b) Os valores singulares mudam se a primeira linha de A for trocada com a quarta? Justifique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) (2.0) Deseja-se refletir $v = (1, 1, 1)$ em torno de um plano para obter um vetor alinhado a $w = (1, 1, 0)$. Obtenha (a) o vetor unitário ortogonal a esse plano e (b) a matrix de reflexão que faz esse mapeamento.

3) (2.0) Seja $Ax \neq b$. Obtenha uma aproximação para x usando a decomposição QR.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4) (2.0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz A mostrada abaixo. Pede-se (a) a dimensão da imagem, a dimensão do núcleo e o tipo de transformação (injetora, etc.), (b) uma base para o núcleo de A. (c) Verifique se $Im(A^T)$ é complemento ortogonal de $kr(A)$ em $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) (2.0) (a) Se $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é um operador autoadjunto, pode-se afirmar que $kr(A - \lambda_1 I) \bigoplus kr(A - \lambda_2 I) \bigoplus kr(A - \lambda_3 I) = \mathbb{R}^3$, onde λ's são os autovalores de A? Justifique. (b) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica, existe uma base que gere uma matriz similar à A que seja diagonal? Justifique. (c) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\{w_1, w_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, que subespaço é gerado por $v_i \otimes w_j$ ($i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$)?

AL GABARITO 2013.2

1. a) $A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

$\det(A^TA - \lambda I) = 0 = (4-\lambda)(13-\lambda) - 1 = 0$

$\lambda_1 = 13{,}11 \quad \lambda_2 = 3{,}89$

$\lambda_1 = 13{,}11 \quad \begin{pmatrix} 4-13{,}11 & 1 \\ 1 & 13-13{,}11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

autovetor $= \begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|(0{,}11, 1)\| \approx 1$

$\lambda_2 = 3{,}89$

$\begin{pmatrix} 4-3{,}89 & 1 \\ 1 & 13-3{,}89 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

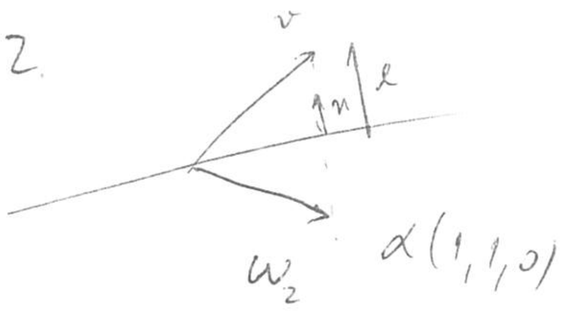
autovetor $= \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}11 \end{pmatrix}$ Logo: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{13{,}11} & 0 \\ 0 & \sqrt{3{,}89} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -1 \\ 1 & 0{,}11 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle \\ \langle a_1, a_2 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix}$

trocar linhas não altera o produto interno, portanto não altera A^TA, nem os valores singulares de A.

2.



$$\|w_2\| = \|v\| = 1{,}73$$

$$\text{Logo} \quad \|(\alpha,\alpha,0)\| = 1{,}73$$

$$\alpha = 1{,}22$$

$$w_2 + e = v$$

$$e = v - w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}22 \\ 1{,}22 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}22 \\ -0{,}22 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $$n = \frac{e}{\|e\|} = \begin{pmatrix} -0{,}21 \\ -0{,}21 \\ 0{,}95 \end{pmatrix}$$

b) $$P = I - 2nn^T = \begin{pmatrix} 0{,}91 & -0{,}09 & 0{,}40 \\ -0{,}09 & 0{,}91 & 0{,}40 \\ 0{,}40 & 0{,}40 & -0{,}82 \end{pmatrix}$$

3. $$A = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \qquad e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 0{,}71 \\ 0{,}00 \\ 0{,}71 \\ 0{,}00 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1\|} = \begin{pmatrix} 0{,}41 \\ 0 \\ -0{,}41 \\ 0{,}82 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | \\ e_1 & e_2 \\ | & | \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{pmatrix} \|v_1\| & \langle v_2 e_1\rangle \\ 0 & \|\tilde{v}_2\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}41 & 1{,}41 \\ 0 & 2{,}45 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema

$A\hat{x} = b \longrightarrow QR\hat{x} = b$

$R\hat{x} = Q^T b \longrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}41 & 1{,}41 \\ 0 & 2{,}45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}13 \\ 2{,}05 \end{pmatrix}$

$\hat{x}_1 = 0{,}67 \qquad \hat{x}_2 = 0{,}84$

4. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \qquad V \to W$

$\dim V = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Kr} A$

$4 = 2 + 2$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$

$\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$ (contradomínio) $\longrightarrow$ não é sobrejetora

$\operatorname{Kr}(A) \neq \{0\} \longrightarrow$ não é injetora

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_1 + v_2 + 2v_4 = 0$ (1)

$v_1 + 2v_2 + 3v_4 - v_3 = 0$ (2)

$v_1 + v_2 + 2v_4 = 0 \longrightarrow v_1 + v_2 = -2v_4$ (3)

(3) em (1)

$-2v_4 + 2v_4 = 0$

$v_4 = \ldots$

$v_1 = -2c - v_2 \quad (4)$

(4) em (2)

$v_2 - v_3 = -c \longrightarrow v_3 = v_2 + c$

$v_2 = s$

$$\begin{pmatrix} -2c-s \\ s \\ s+c \\ c \end{pmatrix} \quad \text{Logo} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{K_1}^{c=s=1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{K_2}^{c=1,\ s=2}$$

b) Base p/ $Ke(A) = \{ K_1, K_2 \}$

c) $Im\, A^T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \underset{|}{\overset{|}{m_1}}, \underset{|}{\overset{|}{m_2}} \right\}$

$\langle K_1, m_1 \rangle = 0$, $\langle K_1, m_2 \rangle = 0$, $\langle K_2, m_1 \rangle = 0$, $\langle K_2, m_2 \rangle = 0 \longrightarrow Im\, A^T \perp Ke(A)$

5. a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ autoadjunto $A = A^T$

$A = Q \Delta Q^T$ (teorema espectral)

autovetores formam uma base ortogonal Logo,

$v_1 \oplus v_2 \oplus v_3 = \mathbb{R}^3$

$Ke(A - \lambda_1 I) = v_1$

$Ke(A - \lambda_2 I) = v_2$

$Ke(A - \lambda_3 I) = v_3$

5 b) $A = Q\Lambda Q^T$ (teorema espectral)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$ é diagonal e

$[A]_Q = Q^T A Q = \Lambda$. Obtida por uma mudança de base, portanto similar.

c) Subespaço das matrizes $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$

observe que $v_i \otimes w_j = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

α

[illegible]

11

Prova de Álgebra Linear (01/08/2012)
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

COPPE UFRJ

Primeiro indique os passos para resolver o problema. Depois faça as contas.

1) (2,0) Faça uma parte da decomposiçao em valores singulares ($A = U\Sigma V^T$) da matriz A. Calcule V e Σ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) (2,0) Faça a decomposição QR da matriz abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) (2,0) Dada a reta $u = at + b$, calcule os coeficientes ótimos da reta no sentido dos mínimos quadrados. Têm-se as seguintes informações: $u(t = 0) = 2$, $u(t = 1) = 5$, $u(t = 2) = 4$.

4) (1,0) Sejam as matrizes abaixo associadas a transformações lineares $T : V \to W$. Classifique-as como injetora, sobrejetora ou bijetora. Justifique a sua resposta.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) (0,5) Calcule uma base para a imagem da transformação adjunta da matriz A do exercício 1.

6) (0,75) Dada uma matriz $A \in R^{4\times 2}$, quais são as possíveis soluções para o sistema $Ax = b$? Justifique a sua resposta. (Possíveis soluções: solução única, nenhuma solução, infinitas soluções).

7) (0,5) Seja um operador auto-adjunto $T : V \to V$. Podemos afirmar que a matriz associada a esse operador é definida semi-positiva? Justifique a sua resposta.

8) (0,5) Mostre que o determinante é invariante a uma mudança de base.

9) (0,75) Escreva uma base para o subespaço gerado pelo produto tensorial $v \otimes w$, onde $v \in R^2$ e $w \in R^3$.

A.L. GABARITO 2012.2

1) $A = U \Sigma V^T$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(AA^T - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

Logo $\sigma_1 = \sqrt{3}$ e $\sigma_2 = 1$ e $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T A v_i = \lambda_i v_i$$

$\lambda's = \{0, 1, 3\}$

$\lambda = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$

onde $\|(1,-1,1)\| = \sqrt{3}$

$\lambda_2 = 1$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda = 3$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = u_2 - e_1 \langle u_2, e_1 \rangle$$

$$e_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \begin{pmatrix} 0,665 \\ -0,745 \end{pmatrix}$$

$A = QR$ onde $Q = \begin{pmatrix} 0,745 & 0,667 \\ 0,667 & -0,745 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \|u_1\| & \langle u_2, e_1 \rangle \\ 0 & \|\tilde{u}_2\| \end{pmatrix}$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 0,079 \\ 0 & 1,412 \end{pmatrix}$$

3. $Ax = c$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolver sistema

$$A^T A x = A^T c$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 8/3 \end{cases}$ ótimos no sentido dos min quadrados.

4. A_1 tem rank $= 2$ $\quad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Kr}(A_1)$$
$$2 = 2 + 0$$

$\dim \operatorname{Kr}(A_1) = 0$ — injetora

Contradomínio $\mathbb{R}^3 \neq \operatorname{Im}(A_1) = \mathbb{R}^2$ (ñ é sobrejetora)

A_2 tem rank $= 2$ $\quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\dim \operatorname{Kr}(A_2) = 1 \neq 0$ $\to$ ñ é injetora

Contradomínio $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Im}(A_2) = \mathbb{R}^2$ $\to$ é sobrejetora

5. $A^* = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, base $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ vetores indep.

6. $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \\ x & x \\ x & x \end{pmatrix} x = b \qquad A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

Se A tem rank $= 2$ $\to$ $b \in \operatorname{Im} A \to 1$ solução; $b \notin \operatorname{Im} A \to 0$ soluções

Se A tem rank < 2 $\to$ $b \in \operatorname{Im} A \to \infty$ soluções; $b \notin \operatorname{Im} A \to 0$ soluções

7. Não. Contraexemplo $A = A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\to$ Def. negativa

8. $\det(A) \stackrel{?}{=} \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(AS) = \det(AS)\det(S^{-1})$
$= \det(ASS^{-1}) = \det(A)$ $\square$

9. Subespaço $v \otimes w \to \mathbb{R}^{2\times 3}$

Base $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

15

COPPE UFRJ

Prova de Álgebra Linear (17/04/2013)

Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema, depois faça as contas.

1) (1,5) Faça a decomposição QR da matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mostrada abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) (2,0) Faça a decomposiçao em valores singulares ($A = U\Sigma V^T$) da matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mostrada abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) (2,5) Considere o subespaço gerado pelos vetores $a_1 = (1,2,0,1)$ e $a_2 = (1,0,0,1)$. Dado $v = (1,1,1,1)$, faça a) a projeção e b) a reflexão de v no subespaço mencionado.

4) (2,0) a) Obtenha uma base para a imagem da transformação adjunta de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2, x_3) = (\cancel{x_1+2x_3}, x_1+2x_3, 2x_1+x_2+3x_3, x_1+2x_3, x_1+2x_2)$. b) Calcule e faça o desenho de uma base para o núcleo de A e uma base para a imagem de A^T, dado $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mostrada abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) (1,0) Calcule as normas $||A||_1$, $||A||_2$ e $||A||_\infty$ da matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mostrada abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6) (1,0) Mostre que $(u \otimes v)w = u < v, w >$, onde u, v, $w \in \mathbb{R}^n$.

A.L. GABARITO 2013.1

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,10)}{\sqrt{101}} = \begin{pmatrix} 0{,}0995 \\ 0{,}9950 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{\| v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 \|} = \begin{pmatrix} 0{,}9950 \\ -0{,}0995 \end{pmatrix} = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}0995 & 0{,}9950 \\ 0{,}9950 & -0{,}0995 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \|v_1\| & \langle v_2, e_1 \rangle \\ 0 & \|\tilde{v}_2\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}0499 & 1{,}9901 \\ 0 & 9{,}8509 \end{bmatrix}$$

2. $A^TA = 2 \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ v_1 = 1 \end{cases}$

$$A \in \mathbb{R}^{3\times 1} = U_{3\times 3}\, \Sigma_{3\times 1}\, V_{1\times 1}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } V = 1$$

$$U = A\Sigma^{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{e_1}{1/\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \underbrace{0}_{} & \underbrace{0}_{?} \end{bmatrix}$$

U deve ser ortogonal!

Logo, $U = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$

G-S $v_2 = (1,0,0)$ (chute) $\to e_2 = \dfrac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1\|} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$

$v_3 = (0,1,0) \to e_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = (0,1,0)$

3. 

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

a) Projeção $= A\hat{x} = \hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2$

e $\perp$ subespaço $\quad \langle a_i , v - A\hat{x} \rangle = 0$

$$A^T v = A^T A \hat{x}$$

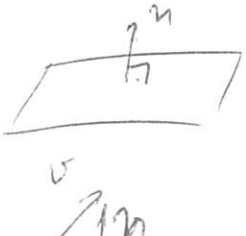
$$A^T v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resolver sistema $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

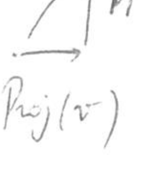
$$\begin{cases} 6\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 = 4 \\ 2\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 = 2 \longrightarrow \quad \hat{x}_1 = 1 - \hat{x}_2 \end{cases}$$

$$3(1 - \hat{x}_2) + \hat{x}_2 = 2 \longrightarrow \begin{cases} \hat{x}_2 = 1/2 \\ \hat{x}_1 = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{Projeção} = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) 

$$n = v - \text{Proj}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{Reflexão} = v - 2\langle n, v \rangle n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Base p/ imagem (A^T). Elim Gaussiana $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RANK = 2

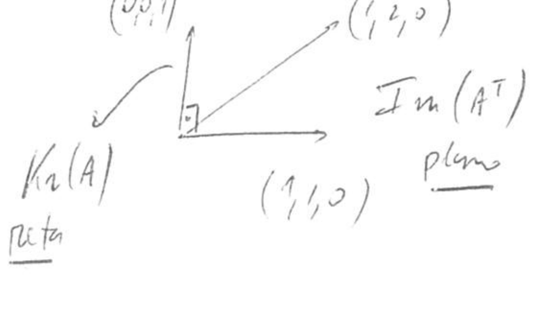
Base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ Duas primeiras colunas independentes

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad Kr(A): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = c$ $\quad$ Base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$Im(A^T): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ Base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ são independentes



$Kr(A) \perp Im(A^T)$

5. $\|A\|_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\|_1 = 5$ (maior soma, colunas)

$\|A\|_\infty = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\|_\infty = 3$ (maior soma, linhas)

$\|A\|_2 = \max(\sigma_i)$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(13-\lambda) - 4 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0{,}67 \\ \lambda_2 = 13{,}32 \end{cases}$$

$\sigma_1 = \sqrt{13{,}32} = 3{,}65$

$\|A\|_2 = 3{,}65$

6. $(u \otimes v)\,w$

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \underbrace{(v_1 w_1 + v_2 w_2)}_{\langle v, w \rangle}$$

$(u \otimes v)\,w = u \langle v, w \rangle$