COPPE
UFRJ

Prova de Álgebra Linear (02/06/2015)
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema, depois faça as contas. Justifique as respostas.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

1) (3,0) Calcule o maior valor singular da matriz M. Qual é a dimensão do $Kr(M)$? Obtenha uma base para o $Kr(M^T)$. Quais são as possíveis soluções (solução única, infinitas soluções, etc) para o sistema $Mx = b$?

2) (2,5) Faça a reflexão da primeira coluna de M em relação ao hiperplano, cuja direção ortogonal é dada pelo vetor $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Obtenha o vetor normalizado, ortogonal ao hiperplano para o qual uma reflexão da primeira coluna de M esteja na direção de $(0, 1, 0, 0)$.

3) (3,0) Classifique a transformação $T : R^3 \to R^3$ representada pela matriz N como injetora, sobrejetora, etc. Obtenha a projeção de $(1, 1, 1)$ no subespaço formado pelas duas primeiras colunas de N. Use a decomposição QR para resolver o sistema. Calcule o módulo do erro da aproximação.

4) (0,5) Se N pode ser escritas por blocos $N = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, classifique o complemento de Schur de A em N como definido positivo, definido semi-negativo, indefinido, etc.

5) (1,0) Mostre que a forma bilinear anti-simétrica $\omega(u, u) = 0$, $\forall u \in V$, é representada por uma matriz anti-simétrica $A = -A^T$. Dica: comece com $\omega(u + v, u + v)$.

GABARITO A1 2015.1

(1) $M^T M \phi = \lambda \phi$, $M^T M = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(7-\lambda)(3-\lambda) - 16 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 5 = 0$ 1,0

$\lambda = \dfrac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 0{,}53 \\ \lambda_2 = 9{,}47 \end{cases}$ $\sigma_{MAX} = \sqrt{\lambda_2} = \underline{3{,}10}$

$\dim \mathrm{Ker} M = \dim V - \dim \mathrm{Im} M = 2 - 2 = 0$

$\dim \mathrm{Ker} M^T = \dim W - \dim \mathrm{Im} M^T = 4 - 2 = 2$ 0,5

Eliminação de Gauss $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ rank = 2

<u>Base p/ Ker M^T</u> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + b + 2c + d = 0 \\ a + c + d = 0 \end{cases}$

$a = -c - d \rightarrow b + c = 0 \rightarrow b = -c$

$a + c + d = 0$. Se $d = 0$ $a = -c$. Se $a = 0$, $c = -d$.

Logo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 1,0

<u>$Mx = b$</u> $\begin{cases} \text{se } b \in \mathrm{Im} M \rightarrow 1 \text{ solução pois } \mathrm{Ker}(M) = \{0\} \\ \text{se } b \notin \mathrm{Im} M \rightarrow 0 \text{ soluções.} \end{cases}$

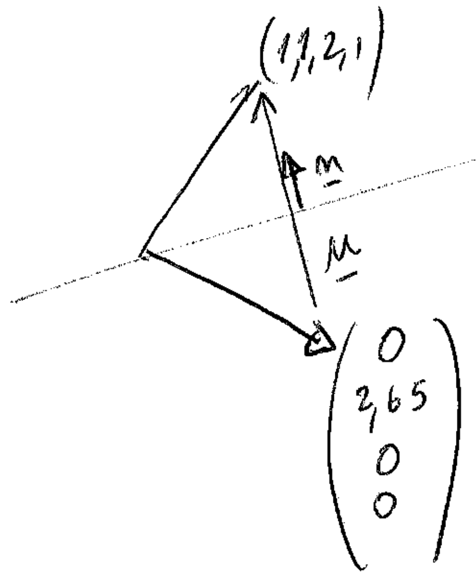
0,5

(2) reflexo $= P\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$P = I - 2\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}0 & \cancel{0} & -1 & 0\\0 & +1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & +1\end{pmatrix}$$. Logo reflexo $= \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 1,2

$\|(1,1,2,1)\| = \sqrt{1+1+4+1} = 2{,}65$



$$\begin{pmatrix}0\\2{,}65\\0\\0\end{pmatrix} + u = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \rightarrow u = \begin{pmatrix}+1\\-1{,}65\\+2\\+1\end{pmatrix}$$

$\|u\| = 2{,}95$

$$n = \begin{pmatrix}+1/2{,}95\\-1{,}65/2{,}95\\+2/2{,}95\\+1/2{,}95\end{pmatrix}$$ 1,3

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$

rank = 3

É injetora $Ker(N) = 0$ $\qquad \dim Ker N = \dim V - \dim Im N = 3 - 3 = 0$

É sobrejetora $Im(N) = C.D. = \mathbb{R}^3$

Logo é bijetora 1,0

Projeção

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ N(1) & N(2) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$A^T A x = A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}}$$ 0,5

$$QRx = A^T b$$

$$Rx = Q^T A^T b$$ 1,5

$$Q = \begin{pmatrix} | & | \\ e_1 & e_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \|\tilde{v}_1\| & \langle v_2, e_1 \rangle \\ 0 & \|\tilde{v}_2\| \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \div \text{norm } \|(10,12)\| = \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,77 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{\| v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 \|} = \begin{pmatrix} -0,76 \\ 0,64 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo } Q = \begin{pmatrix} 0,64 & -0,76 \\ 0,77 & 0,64 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} +15,2 & 23,0 \\ 0 & 3,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 15,2 & 23,0 \\ 0 & 3,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 & +0,77 \\ -0,76 & 0,64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ x_2 = 0,22 \text{ e } x_1 = 0,14 \\ \|e\| = \|Ax - b\| = 1,07 // \end{cases}$$

④ Comp. Schur de A em N

$$\left(C - B^T A^{-1} B \right) = 2 - \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2 - \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 17 = \underbrace{-15}$$

0,5

É um escalar negativo!

---

⑤ $\omega(u+v, v+u) = \underbrace{\omega(\cancel{u},u)}_{0} + \omega(u,v) + \omega(v,u) + \underbrace{\omega(\cancel{v},v)}_{0} = 0$

1º $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$

$$\underbrace{u^T A v}_{\text{transp.}} = -v^T A u$$

$$v^T A^T u = -v^T A u$$

$$\boxed{A = -A^T}$$