Lista de Álgebra Linear

Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

1) Resolva os sistemas lineares abaixo, i.e., calcule $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$(a) \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +5x_2 & +7x_3 & = 14 \\ 5x_1 & +7x_2 & +11x_3 & = 23 \end{array} \right. \quad , \quad (b) \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +5x_2 & +7x_3 & = 14 \\ 3x_1 & +7x_2 & +10x_3 & = 20 \end{array} \right. ,$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +5x_2 & +7x_3 & = 14 \\ 3x_1 & +7x_2 & +10x_3 & = 21 \end{array} \right. .$$

2) Seja uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ representada por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Faça eliminação de Gauss nessas matrizes e calcule os seus respectivos *ranks*.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} .$$

3) Verifique se o conjunto de vetores são linearmente independentes: (a) $(2, -1, 4)$, $(3, 6, 2)$, $(2, 10, -4) \in \mathbb{R}^3$, (b) $(1, 3, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(5, 6, 3)$, $(7, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$, (c) $(4, -4, 8, 0)$, $(2, 2, 4, 0)$, $(6, 0, 0, 2)$, $(6, 3, -3, 0) \in \mathbb{R}^4$, (d) $(3, 0, 4, 1)$, $(6, 2, -1, 2)$, $(-1, 3, 5, 1)$, $(-3, 7, 8, 3) \in \mathbb{R}^4$:

4) (a) Calcule a projeção do vetor $(5, 3, 2, -9) \in \mathbb{R}^4$ na direção $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$, (b) calcule a distância entre os vetores $(5, 3, 2, -9) \in \mathbb{R}^4$ e $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^4$, (c) Calcule o ângulo formado pelos vetores $(5, 3, 2, -9) \in \mathbb{R}^4$ e $(1\ 2, -3, 7) \in \mathbb{R}^4$. (d) Verifique se os vetores $\in \mathbb{R}^3$ a seguir se encontram no mesmo plano: $(1, 0, -2)$, $(3, 1, 2)$, $(1, -1, 0)$.

5) (a) Que matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ multiplicada por $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ faz com que a terceira linha de A seja somada com duas vezes sua segunda linha? (b) que matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ multiplicada por $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ troca a terceira linha de A pela sua primeira linha?

6) Obtenha uma expressão para A^n:

$$(a)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (b)\, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

7) Dada a equação diferencial, $d^2T/dy^2+dT/dy+f=0$ (onde T e f dependem de y), obtenha o sistema de equações $Ax=b$ ($A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, x e $b \in \mathbb{R}^4$), fazendo uma aproximação por diferenças finitas. Considere x o vetor correspondente a T, b o vetor correspondente a f, e as condições de contorno $T(y=0)=T_A$ e $T(y=1)=T_B$. Calcule a dimensão da imagem de A.

8) Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ abaixo, faça: (a) decomposição QR usando Gram-Schmidt, (b) decomposição QR usando Householder e (c) decomposição LU.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

9) Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ abaixo, faça a decomposição em valores singulares ($A = U \sum V^T$).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10) Dada a base $\{x, x^2\} \subset P_2$, aplique o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal. Use a seguinte definição de produto interno $< v, w >= \int_0^1 v.wdx$.

11) Encontre uma base para a imagem de A e uma base para o núcleo de A:

$$(a)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

12) Calcule as raízes dos polinômios característicos e os pares de autovalores e autovetores das transformações lineares abaixo:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(c) T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 0, 5x_3)$.

13) Considere o problema de autovalor generalizado $Av = \lambda Bv$. Prove que $A = BQ\Lambda Q^{-1}$.

14) Prove que a transformação definida por uma reflexão em torno do eixo x é uma transformação linear.

15) Dada as matrizes abaixo, (a) calcule a dimensão da imagem e a dimensão do núcleo, (b) diga se a transformação é injetora, sobrejetora ou bijetora

(isomorfismo). (c) Seja $v = (1, -1, 1, -1)$; este vetor está no núcleo ou imagem das matrizes abaixo? Justifique as respostas.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16) Se A e B são simétricas definidas positivas, o que podemos dizer de: (a) $(A^T)^3$, (b) $(B^T - A)$ e (c) $-(B^T)^{-4}$. Justifique.

17) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Pergunta-se: o espaço gerado por $w_1 = (-1/\sqrt(3), -1/\sqrt(3), -1/\sqrt(3))$ é complemento ortogonal de U? Sendo que $u_1 = (-1/\sqrt(2), 0, 1/\sqrt(2))$ e $u_2 = (1/\sqrt(6), -2/\sqrt(6), 1/\sqrt(6))$ geram U.

18) Dadas as matrizes abaixo, (a) prove que existe um operador $T \in L(\mathbb{R}^2)$ e duas bases ortogonais $B = \{u_1, u_2\}$ e $\hat{B} = \{v_1, v_2\}$ tais que $[T]^B = N$ e $[T]^{\hat{B}} = M$; sendo $[T]^B$ definido como $U^T T U$ e $[T]^{\hat{B}} = V^T T V$, onde os vetores $\{u_1, u_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ são as colunas de U e V, respectivamente. (b) Desenhe $\{u_1, u_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ e os autovetores de T.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

19) Dados os vetores $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (3, 1, 1, 1)$ e $v_3 = (4, 2, 1, 1)$. (a) achar uma base para $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, (b) uma base ortonormal para $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

20) Provar que os polinômios $p_1 = x^2 + 2x + 3$, $p_2 = 4x^2 + x + 1$ e $p_3 = x^2 + x + 1$ $\in P_2$ são linearmente independentes.

21) Dado o operador abaixo, (a) calcule os autovalores e autovetores de A, (b) encontre a relação entre os autovalores e autovetores A com os autovalores e autovetores de $(A - \alpha I)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ e I é a matriz identidade, (c) que condição sobre α garante que $(A - \alpha I)$ seja definido positivo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

22) Para dois mapeamentos $B : U \mapsto V$ e $A : V \mapsto W$, prove que (a) $Kr(B) \subset Kr(AB)$, (b) $Kr(B) = Kr(AB)$ se A for não singular, (c) (AB) é não singular se A e B forem não singulares.