Prova de Álgebra Linear (09/06/2014)
Prof. Thiago Ritto (tritto@mecanica.ufrj.br)

Primeiro indique os passos para resolver o problema, depois faça as contas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) (2,0) Classifique as matrizes acima em termos de injeção, sobrejeção e isomorfismo. Justifique.

2) (2,0) Considere a matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mostrada acima. Obtenha uma base para $Kr(C)$ e mostre que $Kr(C) \oplus Im(C^T) = \mathbb{R}^3$.

3) (2,0) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mostrada acima. (a) Calcule as matrizes da decomposição em valores singulares U, Σ, e V. (b) Calcule $||A||_2$ e $||A||_{Frobenius}$.

4) (1,5) (a) Escreva os blocos da forma canônica de Jordan da matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mostrada acima. Seja a matriz $B' = [b_2 \quad b_3]$ formada pela segunda e terceira colunas de B. Quantas soluções tem o sistema $B'x = c$? (Onde $x \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}^3$.)

6) (2,0) Faça a reflexão e projeção de $v = (3, 1, 3, 1)$ no subespaço $Im(A)$.

5) (0,5) Seja $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $Kr(D)$ tem dimensão 1, podemos afirmar que D tem um autovalor igual a zero? Justifique.

GABARITO 2014.1 A.L

① $T: V \to W$ $\begin{cases} \text{é injetora se } Ker(T) = 0 \\ \text{é sobrej. se } \dim(Im(T)) = \dim W \end{cases}$

$$\begin{cases} \dim V = \dim Im(T) + \dim Ker\, T \\ \dim Im\, T = \dim Im\, T^T = \text{rank} \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rank$(A) = 2$, logo $Ker(A) = 0$ — injetora

$\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^4$, logo não é sobrejetora

(Im) (C.D)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ } linhas repetidas   rank$(B) = 2$, logo $\dim Ker\, B = 1$

Ñ É INJETORA

$\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$, logo não é sobrej.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.   rank$(C) = 2$ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

C não é nem inj. nem sob.

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} a + c = 0 \to a = -c \\ b + c = 0 \to b = -c \\ 2a + b + 3c = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c$

Base p/ $Ker(C)$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$Kr(C)$ é ortogonal às linhas de C^T ?

$\langle (1,0,1), (-1,-1,1) \rangle = \langle (0,1,1), (-1,-1,1) \rangle = \langle (2,1,3), (-1,-1,1) \rangle = 0$

$\rightarrow$ SIM

$\dim \operatorname{Im} C^T = 2$ $\quad$ Logo $Kr(C) \oplus \operatorname{Im}(C^T) = \mathbb{R}^3$

$\dim Kr(C) = 1$.

3 $A = U \Sigma V^T$ $\quad \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 26 = 0$

$\lambda_1 = 7{,}56 \wedge \lambda_2 = 3{,}44$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{7{,}56} & 0 \\ 0 & \sqrt{3{,}44} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovetores:

$$\begin{pmatrix} 5-7{,}56 & 2 \\ 2 & 6-7{,}56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2{,}56a + 2b = 0 \rightarrow b = \frac{2{,}56}{2} a$

$2a - 1{,}56b = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}28 \end{pmatrix} \div \|(1; 1{,}28)\| = \begin{pmatrix} 0{,}62 \\ 0{,}79 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}56 & -2 \\ 2 & 2{,}56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1{,}56a + 2b = 0 \\ 2a + 2{,}56 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2{,}56} \end{pmatrix} \div \|(1; 2{,}56)\|$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}79 \\ -0{,}62 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}79 \\ 0{,}79 & -0{,}62 \end{pmatrix}$$

$$A V \Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}79 \\ 0{,}79 & -0{,}62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{7{,}56} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3{,}44} & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & \underbrace{\quad\quad}_{?} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & | & | \\ 0{,}3 & -0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & | & | \\ 0{,}7 & -0{,}3 & | & | \end{pmatrix} \end{array}$$

GRAM-SCHMIDT

$v_3 = (1,0,0,0)$

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2}{\| \tilde{v}_3 \|} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,6 \\ -0,3 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

$v_4 = (1,1,1,1)$

$$u_4 = \frac{v_4 - \langle v_4, u_1 \rangle u_1 - \langle v_4, u_2 \rangle u_2 - \langle v_4, u_3 \rangle u_3}{\| \tilde{v}_4 \|}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,5 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\| A \|_2 = \sigma_{max} = \sqrt{7,56} \quad \text{e} \quad \| A \|_F = \sqrt{1^2+2^2+1^2+2^2+1^2} = \sqrt{11}$$

(4) $$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (1-\lambda)2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{J_1 = 0 \quad J_2 = 1 \quad J_3 = 3}_{\text{Blocos de Jordan}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Colunas indep.} \rightarrow \text{Ker} B' = 0} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Se $c \in \text{Im} B'$ existe 1 solução

Se $c \notin \text{Im} B'$ não tem solução

⑤ Se $\ker D = \mathbb{R}$ e $(D - \lambda I)v = 0$

p/ $\lambda = 0$ $\quad Dv = 0$

Então tem um autovalor zero associado a D

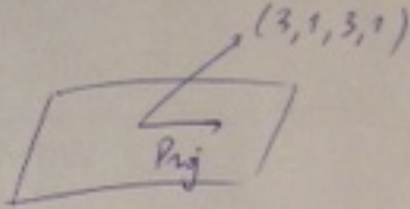
⑥ Projeção $\quad x_1 \begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{pmatrix}$

$A^T(Ax - b) = 0 \qquad (\mathrm{Im}(A) \perp e)$

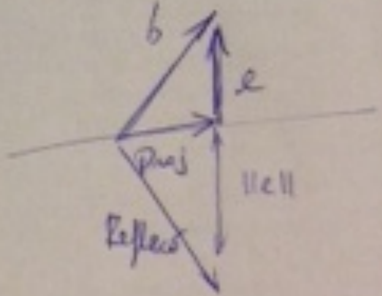
$A^T A x = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 5x_1 + 2x_2 = 9 \\ 2x_1 + 6x_2 = 8 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = 1,46 \\ x_2 = 0,85 \end{matrix}$$

Proj. $= 1,41 \begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix} + 0,85 \begin{pmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{pmatrix}$



erro $= b - Ax = \begin{pmatrix} -0,11 \\ 0,15 \\ 0,18 \\ 0,15 \end{pmatrix}$



$b - 2e$ = Reflexão

ou $[I - 2(xx^T)] = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 0,7 \\ 2,6 \\ 0,7 \end{pmatrix}$

onde $x = \dfrac{e}{\|e\|}$