

A Fig. 1 ilustra um avião da esquadrilha da fumaça fazendo um *loop*. O centro de massa C do avião faz um círculo de raio 100m, e o avião completa uma volta em relação ao eixo  $\mathbf{b}_3$ . As dimensões são dadas na figura e a velocidade tangencial do centro de massa do avião se mantém constante 1000 km/h. Sabe-se que um piloto não resiste mais do que alguns minutos a uma aceleração de 10g ( $100 \text{ m/s}^2$ ), portanto ele é obrigado a ejetar se a sua aceleração chega nesse patamar. (a) calcule a aceleração máxima que o piloto vai sofrer fazendo o *loop* mostrado, (b) sugira (liste) algumas modificações em relação a situação apresentada que possa diminuir a aceleração do piloto. Finalmente, (c) se fosse possível fazer um *loop* com o mesmo movimento do centro de massa, mas agora com dois giros do avião: uma volta em relação ao eixo  $\mathbf{b}_3$  e também uma volta em relação ao eixo  $\mathbf{c}_2$ , qual seria a aceleração máxima do piloto nessa situação hipotética?

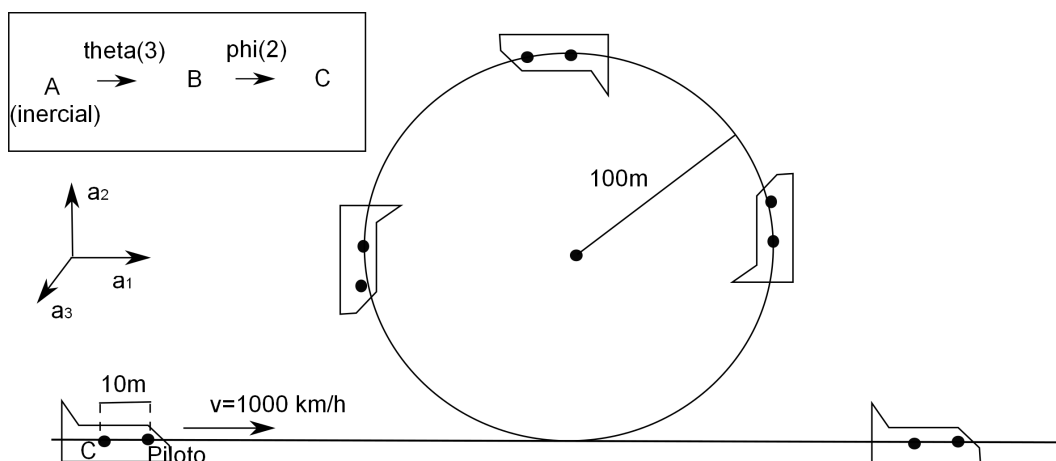


Figura 1: Avião fazendo um *loop*.

Matrizes de transformação

$$[{}^A T_B] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [{}^B T_C] = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

a) A aceleração do ponto  $P$  (piloto) em relação referencial  $A$  pode ser escrita como

$${}^A \mathbf{a}^P = {}^A \mathbf{a}^C + {}^A \boldsymbol{\omega}^B \times ({}^A \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{r}^{P/C}). \quad (1)$$

Observe que a velocidade tangencial  $v$  do centro de massa do avião  $C$  é constante (1000km/h), logo  $v = \omega R$ , onde  $R = 100\text{m}$ . Temos também  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = \omega$ . Se  $r = 10\text{m}$ , Os termos da equação acima são dados por

$${}^A\mathbf{a}^C = w^2 R \mathbf{b}_2, \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^B = \dot{\theta} \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{r}^{P/C} = r \mathbf{b}_1.$$

Então

$${}^A\mathbf{a}^P = -\dot{\theta}^2 r \mathbf{b}_1 + w^2 R \mathbf{b}_2$$

O módulo da aceleração

$$\|{}^A\mathbf{a}^P\| = \sqrt{(\dot{\theta}^2 r)^2 + (w^2 R)^2} = \sqrt{(w^2 r)^2 + (w^2 R)^2}$$

Finalmente

$$\|{}^A\mathbf{a}^P\| = 77.5 \text{ g}$$

b) Aumentar  $R$ , diminuir  $r$ , diminuir  $v$ .

c) A aceleração do ponto  $P$  (piloto) em relação referencial  $A$  pode ser escrita como

$${}^A\mathbf{a}^P = {}^A\mathbf{a}^C + {}^A\boldsymbol{\omega}^C \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}^{P/C}) + {}^A\boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{P/C}. \quad (2)$$

Os termos da equação acima são dados por

$${}^A\mathbf{a}^C = w^2 R \mathbf{c}_2, \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^C = \dot{\theta} \mathbf{b}_3 + \dot{\phi} \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{r}^{P/C} = r \mathbf{c}_1,$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^C = [{}^C T_B] \dot{\theta} \mathbf{b}_3 + \dot{\phi} \mathbf{c}_2 = -\dot{\theta} \sin \phi \mathbf{c}_1 + \dot{\phi} \mathbf{c}_2 + \dot{\theta} \cos \phi \mathbf{c}_3$$

$${}^A\boldsymbol{\alpha}^C = -\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{c}_1 - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \mathbf{c}_3$$

$${}^A\boldsymbol{\alpha}^C \times \mathbf{r}^{P/C} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \\ -\dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \end{pmatrix} = -r \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \mathbf{c}_2$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}^{P/C} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \cos \phi \end{pmatrix} = r \dot{\theta} \cos \phi \mathbf{c}_2 - r \dot{\phi} \mathbf{c}_3$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^C \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}^{P/C}) = - \begin{pmatrix} 0 & r \dot{\phi} & r \dot{\theta} \cos \phi \\ -r \dot{\phi} & 0 & 0 \\ -r \dot{\theta} \cos \phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \cos \phi \end{pmatrix} =$$

$$= (-r \dot{\phi}^2 - r \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) \mathbf{c}_1 - r \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi \mathbf{c}_2 - r \dot{\theta}^2 \cos \phi \sin \phi \mathbf{c}_3 =$$

$$= (-r \omega^2 - r \omega^2 \cos^2 \phi) \mathbf{c}_1 - r \omega^2 \sin \phi \mathbf{c}_2 - r \omega^2 \cos \phi \sin \phi \mathbf{c}_3$$

Logo

$${}^A\mathbf{a}^C = (-r\omega^2 - r\omega^2 \cos^2 \phi)\mathbf{c}_1 + (-r\omega^2 \sin \phi + w^2 R - r\omega^2 \sin \phi)\mathbf{c}_2 - r\omega^2 \cos \phi \sin \phi \mathbf{c}_3$$

$$\|{}^A\mathbf{a}^P\| = \sqrt{(-r\omega^2 - r\omega^2 \cos^2 \phi)^2 + (w^2 R - 2r\omega^2 \sin \phi)^2 + (-r\omega^2 \cos \phi \sin \phi)^2}$$

$$\|{}^A\mathbf{a}^P\|_{\min, \phi=90^\circ} = 62.2g$$

$$\|{}^A\mathbf{a}^P\|_{\max, \phi=270^\circ} = 92.9g$$

O gráfico abaixo mostra o valor do módulo da aceleração para  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

