Formulário (enviar sugestões para tritto@mecanica.ufrj.br)

Vetor posição do ponto P em relação ao ponto O, $\mathbf{r}^{P/O}$, vetor velocidade angular do referencial B em relação ao referencial A, ${}^A\boldsymbol{\omega}^B$, vetor aceleração angular do referencial B em relação ao referencial A, ${}^A\boldsymbol{\alpha}^B$, vetor velocidade do ponto P no referencial A (ponto O fixo em A), sendo B um referencial móvel (ponto Q fixo em B),

${}^A\mathbf{v}^P = \frac{{}^A d\mathbf{r}}{dt}^{P/O} = {}^A\mathbf{v}^Q + {}^B\mathbf{v}^P + {}^A\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{r}^{P/Q}$,

aceleração do ponto P no referencial A, ${}^A\mathbf{a}^P = \frac{{}^A d\mathbf{v}}{dt}^P = {}^A\mathbf{a}^Q + {}^B\mathbf{a}^P + {}^A\boldsymbol{\omega}^B \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{r}^{P/Q}) + {}^A\boldsymbol{\alpha}^B \times \mathbf{r}^{P/Q} + 2\,{}^A\boldsymbol{\omega}^B \times {}^B\mathbf{v}^P$.

Matrizes de transformação de coordenadas. Base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ fixa no referencial B e base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ fixa no referencial A (giro θ no sentido positivo dos eixos de coordenadas da base B):

$$[{}_AT_B] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; [{}_AT_B] = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \; [{}_AT_B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Para transformar vetor da base A para base B: $[{}_BT_A] = [{}_AT_B]^T$.

Vetor posição do centro de massa (sistema de partículas/corpo rígido) $\mathbf{r}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}^i$ e $\mathbf{r}^* = \frac{1}{m}\int_C \mathbf{r}^{P/O} dm$, onde $\mathbf{r}^{P/O}$ é a posição de um ponto genérico do corpo C em relação ao ponto O.

Vetor velocidade do centro de massa (sist. de part./corpo ríg.) $\mathbf{v}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}^i$ e $\mathbf{v}^* = \frac{1}{m}\int_C \mathbf{v}^P dm$.

Quantidade de movimento linear (sist. de part./corpo ríg.) $\mathbf{G}^S = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}^i$ e $\mathbf{G}^C = \int_C \mathbf{v}^P dm$ ou $\mathbf{G} = m\mathbf{v}^*$.

Quantidade de movimento angular (sist. de part./corpo ríg.) $\mathbf{H}^{S/O} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^{i/O} \times (m_i \mathbf{v}^i)$ e $\mathbf{H}^{C/O} = \int_C \mathbf{r}^{P/O} \times \mathbf{v}^P dm$.

Impulso linear e angular, $\mathbf{I}^{LIN} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ e $\mathbf{I}^{ANG} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt$. Impulso e quantidade de movimento, $\mathbf{I}^{LIN} = \mathbf{G}(t = t_2) - \mathbf{G}(t = t_1)$ e $\mathbf{I}^{ANG} = \mathbf{H}(t = t_2) - \mathbf{H}(t = t_1)$.

Segunda Lei de Newton (sempre em um referencial inercial), $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$. Mais 3 equações de movimento, $\mathbf{r}^{P/O} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}^O = \dot{\mathbf{H}}^O + \mathbf{v}^O \times m\mathbf{v}^*$ (P é o ponto de aplicação de $\mathbf{F}$).

Transporte de momentos, $\mathbf{M}^O = \mathbf{M}^{O'} + \mathbf{r}^{O'/O} \times \mathbf{F}$, $\mathbf{H}^O = \mathbf{H}^{O'} + \mathbf{r}^{O'/O} \times \mathbf{G}^C$.

Para base fixa no corpo e ponto O no corpo, $\mathbf{H}^O = [I^O]\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}^{C/O} \times m\mathbf{v}^O$ e $\mathbf{M}^O = \frac{d}{dt}[I^O]\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}^{C/O} \times m\mathbf{a}^O$. Se $\mathbf{v}^O = 0$ ou O é o centro de massa: $\mathbf{H}^O = [I^O]\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{M}^O = \dot{\mathbf{H}}^O$.

Tensor de inércia $[I^O] = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$, onde os momentos/produtos de inércia e teorema dos eixos paralelos:

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_C (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} = \int_C (x^2 + z^2) dm \\ I_{zz} = \int_C (x^2 + y^2) dm \end{cases} \quad \begin{cases} I_{xy} = I_{yx} = -\int_C xy dm \\ I_{xz} = I_{zx} = -\int_C xz dm \\ I_{yz} = I_{zy} = -\int_C yz dm \end{cases} \quad \begin{cases} I_{xx} = I_{xx}^* + m(d_y^2 + d_z^2) \\ I_{yy} = I_{yy}^* + m(d_x^2 + d_z^2) \\ I_{zz} = I_{zz}^* + m(d_x^2 + d_y^2) \end{cases} \quad \begin{cases} I_{xy} = I_{xy}^* - m d_x d_y \\ I_{xz} = I_{xz}^* - m d_x d_z \\ I_{yz} = I_{yz}^* - m d_y d_z \end{cases}$$

Raio de giração em torno de um eixo cujo momento de inércia vale I, $k = \sqrt{I/m}$, ou seja, $I = mk^2$.

Momento de inércia na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$: $I_{uu} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_x u_y - 2I_{yz}u_y u_z - 2I_{zx}u_z u_x$.

Trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ da posição 1 à 2: $W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$.

Energia potêncial gravitacional e elástica, $\Phi_g = mgh$, $\Phi_e = \frac{1}{2}k\mathbf{r}^T\mathbf{r}$.

Energia cinética, $K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^{*T}\mathbf{v}^* + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T[I^*]\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T[I^O]\boldsymbol{\omega}$ ($*$ centro de massa e O ponto do corpo com velocidade zero).

Trabalho e energia, $W_{12}^{FN} = (K2 + \Phi_2) - (K_1 + \Phi_1) = E_2 - E_1 = \Delta E$, onde W_{12}^{FN} é trabalho das forças não-conservativas.

Volume de controle, regime permanente, com entrada 1 e saída 2. $\mathbf{F} = m'(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1)$ e $\mathbf{M}^O = m'(\mathbf{r}^{2/O} \times \mathbf{v}^2 - \mathbf{r}^{1/O} \times \mathbf{v}^1)$, onde $m' (= \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2)$ é a vazão mássica.

Massa variando $\dot{m} = -\dot{m}_o$. $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + m_o\mathbf{v}^o) = m\frac{d}{dt}\mathbf{v} + \dot{m}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^o)$, se $\frac{d}{dt}\mathbf{v}^o = 0$.

Detalhando a formulação para o movimento de um corpo no espaço, $\mathbf{M}^O = \dot{\mathbf{H}}^O = \left(\dot{\mathbf{H}}^O\right)_{local} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}^O$,

onde 'local' é a derivada na base local e $\boldsymbol{\Omega}$ é o vetor velocidade angular desta base em relação ao referencial inercial.

Se $\mathbf{H}^O = [I^O]\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ e $[I^O]$ é diagonal; Lei de Euler:

$$\begin{cases} M_x = I_{xx}\dot{\boldsymbol{\omega}}_x + (I_{zz} - I_{yy})\boldsymbol{\omega}_y\boldsymbol{\omega}_z \\ M_y = I_{yy}\dot{\boldsymbol{\omega}}_y + (I_{xx} - I_{zz})\boldsymbol{\omega}_x\boldsymbol{\omega}_z \\ M_z = I_{zz}\dot{\boldsymbol{\omega}}_z + (I_{yy} - I_{xx})\boldsymbol{\omega}_x\boldsymbol{\omega}_y \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = I_{xx}\dot{\boldsymbol{\omega}}_x + I_{zz}\boldsymbol{\omega}_z\boldsymbol{\Omega}_y - I_{yy}\boldsymbol{\omega}_y\boldsymbol{\Omega}_z \\ M_y = I_{yy}\dot{\boldsymbol{\omega}}_y + I_{xx}\boldsymbol{\omega}_x\boldsymbol{\Omega}_z - I_{zz}\boldsymbol{\omega}_z\boldsymbol{\Omega}_x \\ M_z = I_{zz}\dot{\boldsymbol{\omega}}_z + I_{yy}\boldsymbol{\omega}_y\boldsymbol{\Omega}_x - I_{xx}\boldsymbol{\omega}_x\boldsymbol{\Omega}_y \end{cases}$$

onde as equações do lado direito são para o caso particular de um corpo axissimétrico, onde $[I]$ é diagonal e $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$.

Para resolver problemas: (1) definir bases e referenciais auxiliares, (2) definir matrizes de transformação, (3) fazer diagrama de corpo livre e obter $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$, (4) calcular parte cinemática (velocidades e acelerações), (5) cálculo das massas e tensores de inércia (6) cálculo de $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, (7) fazer $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$, fazer (8) $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ (se ponto fixo ou centro de massa), (9) acrescentar equações de vínculo, se necessário (n incógnitas=n equações) e, finalmente, (10) resolver sistema de equações diferenciais resultante.

Forma alternativa de obter as equações de movimento. Equação de Euler-Lagrange, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$, onde $L = K - \Phi$, q_i são as coordenadas generalizadas, e Q_i são as forças generalizadas; $Q_i = \sum_j \left(F_{xj}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{yj}\frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{zj}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\right)$.

(FAVOR NÃO RASURAR O FORMULÁRIO)