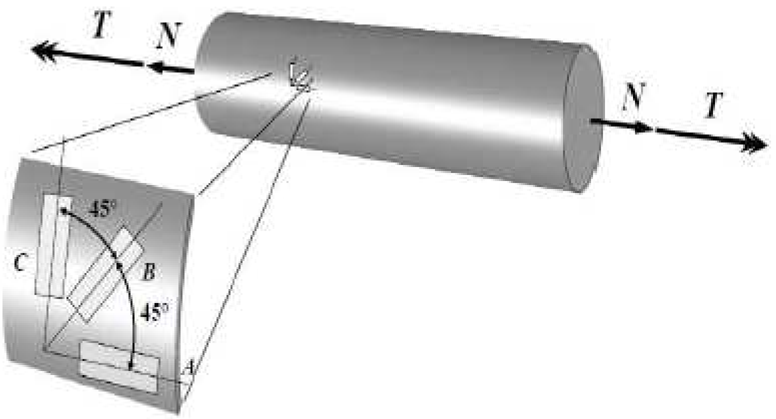
Torção – Exercícios Exemplos

2^a **Questão** (5.0 pontos): Uma barra cilíndrica de diâmetro D é submetida a um carregamento combinado de tração e torção, representados de forma esquemática abaixo e notados como N e T. Uma roseta de extensômetros, apresentada em destaque na figura, é fixada na superfície da barra de forma que o extensômetro A está alinhado com a direção axial e C com a direção circunferencial. O módulo de elasticidade da barra é E e ν seu coeficiente de Poisson. Calcule os esforções N e T em função das deformações longitudinais ϵ_A, ϵ_B e ϵ_C medidas pelos extensômetros A, B e C.



Exercício: Torção

Estado de Tensões (superposição)

→ Força normal : $\boxed{\sigma_z = \dfrac{N}{\pi D^2/4}}$

→ Momento torçor: $\boxed{\sigma_{\theta z} = \dfrac{T D}{2 \dfrac{\pi D^4}{32}} = \dfrac{16 T}{\pi D^3}}$

Eq. constitutiva:

$$\varepsilon_z = \frac{4N}{E \pi D^2} \quad ; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{16 T}{\pi D^3 G}$$

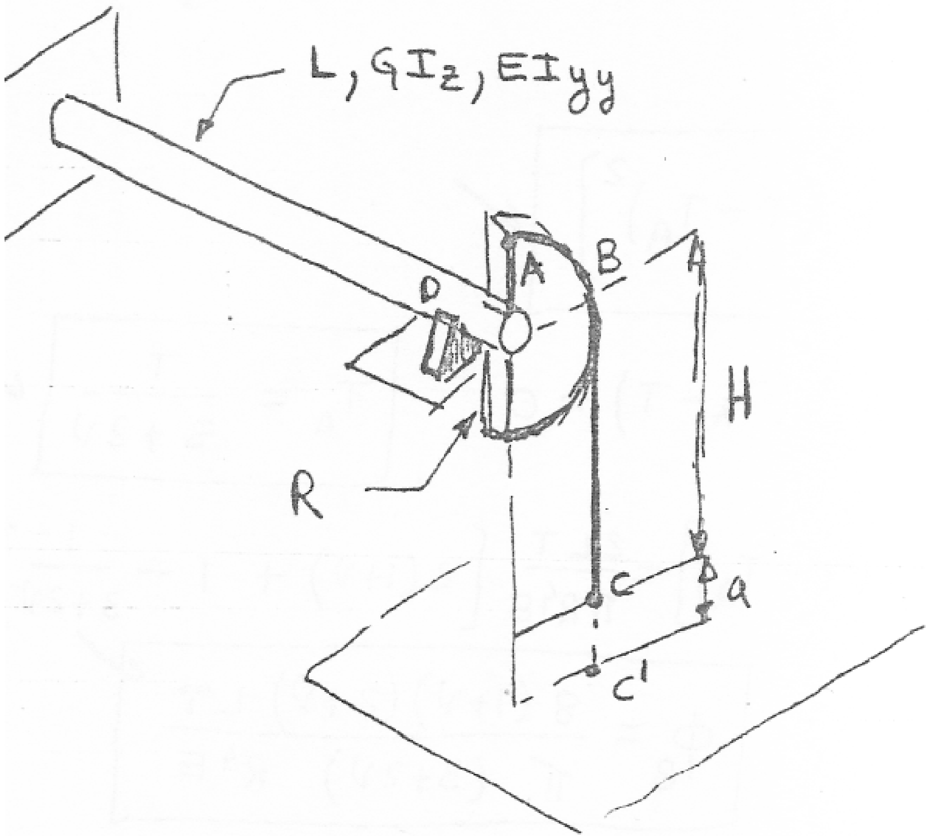
$$\varepsilon_A = \varepsilon_z \longrightarrow \boxed{N = \frac{E \pi D^2}{4} \varepsilon_A}$$

$$\varepsilon_R = -\nu \varepsilon_z \longrightarrow \frac{\Delta R}{R} = -\nu \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_\theta = \frac{2 \cancel{\pi} \Delta R}{2 \cancel{\pi} R} = -\nu \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_A$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} + \frac{\gamma_{\theta z}}{2} \longrightarrow \boxed{T = \frac{\pi D^3 G}{16} \left[2 \varepsilon_B - (\varepsilon_A + \varepsilon_C) \right]}$$

Notas de aula : prof. Nestor Zouain

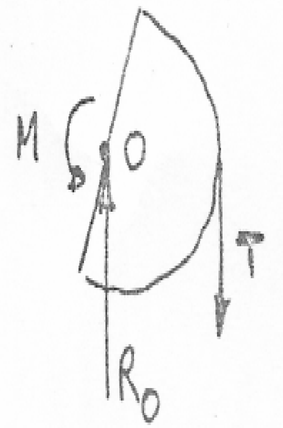


Dados:

a, H, R, L

GI_z, EI_{yy}, EA

I)



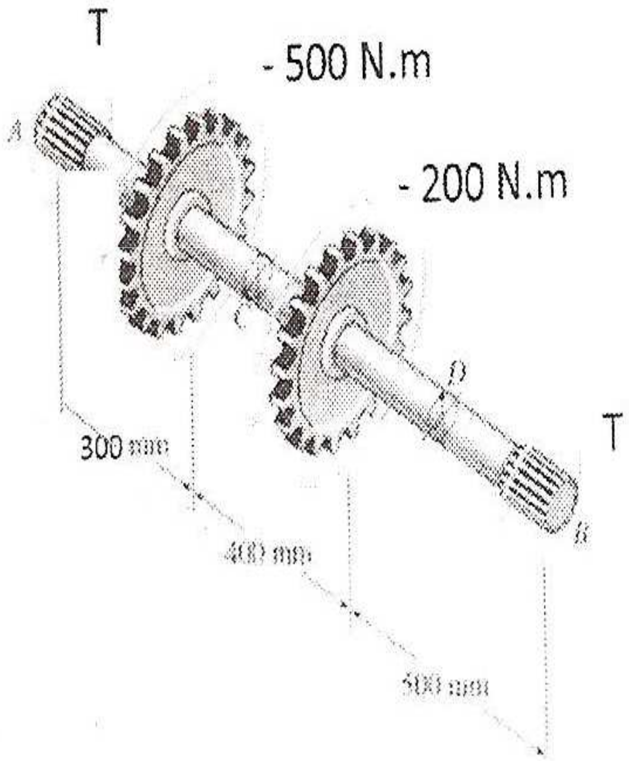
Equilíbrio: $M = RT$ (com ou sem mancal)

Torção: $\phi = \dfrac{ML}{GI_z} \longrightarrow \phi = \dfrac{LR}{GI_z}\,T$

a) $R\phi = a \quad \therefore \quad \boxed{T = \dfrac{GI_z\,a}{LR^2}}$

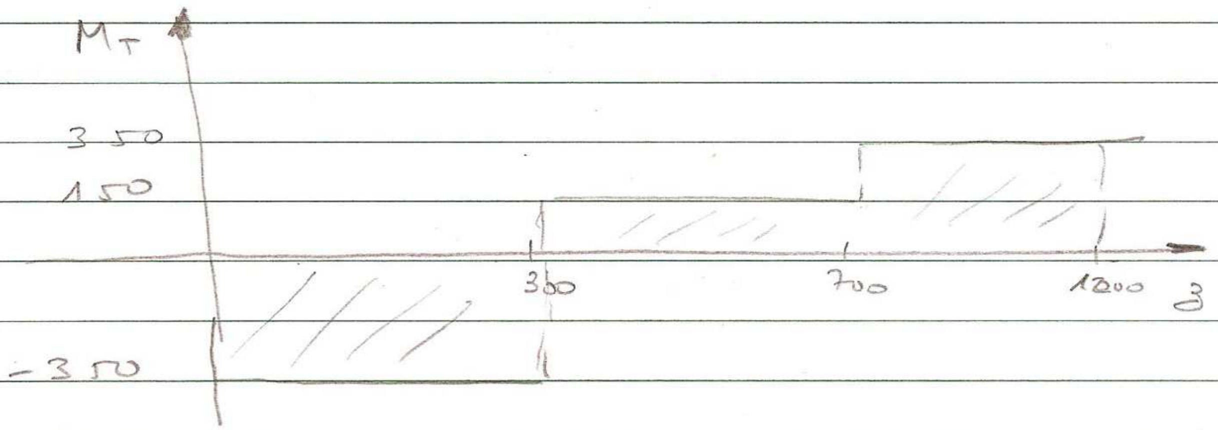
b) $R\phi = a - \delta \qquad \delta = \dfrac{TH}{EA} \quad \therefore \quad \dfrac{LR^2}{GI_z}\,T = a - \dfrac{H}{EA}\,T \qquad \boxed{T = \dfrac{a}{\dfrac{LR^2}{GI_z} + \dfrac{H}{EA}}}$

2^a **Questão** (3 pontos): O conjunto abaixo é acionado por torques de iguais magnitude (T) e sentido em suas extremidades. Calcular o valor mínimo do diâmetro do eixo para que não haja plastificação. O eixo é feito de um aço cujo Módulo de Cisalhamento = 75 GPa e o limite elástico é dado por $\sigma_y = 400 MN/m^2$.



EQUILÍBRIO $2T = 700 \rightarrow T = 350\ N.m$ (0.5)

DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO TORSOR:



(1.0)

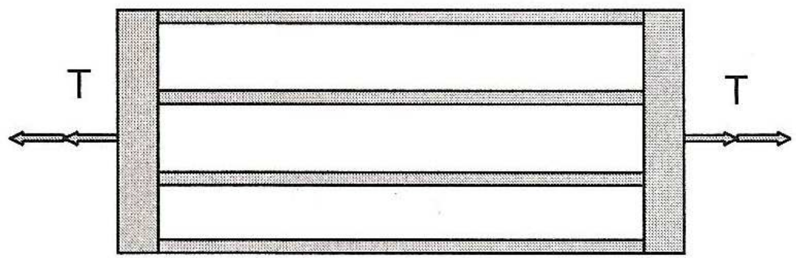
TENSÃO MÁXIMA $r = \frac{D}{2}$ e $0 \leq z \leq 300$ ∪ $700 \leq z \leq 1000$

$$(\tau_{\theta z})_{MAX} = 350 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{32}{\pi D^4} = \frac{5600}{\pi D^3}$$

$$D^3 = \frac{5600}{600 \times 10^6 \times \pi}$$ (1.5)

$$\boxed{D \approx 16.46\ mm}$$

2^a **Questão** : Dois tubos de mesmo material e de comprimento L, espessura t e raios de 2a e 3a (t<<a) são conecatos através de dois discos rígidos (detalhes na figura abaixo). Esta conexão é de tal forma que os eixos dos tubos cilíndricos coincidem, pede-se então: (a) Calcular o momento torçor máximo T_{elas} de forma que não haja plastificação em nenhum ponto do sistema, considerando que o limite elástico em cisalhamento é dado por τ_Y; (b) Encontrar o ângulo de rotação nas extremidades quando o momento torçor ultrapassar ligeiramente esse limite, atingindo $T = \frac{15}{14}T_{elas}$; (c) neste caso calcule as tensões residuais após o descarregamento ($T = 0$). (obs.: tendo em vista que a espessura t é muito pequena, considera-se que a tensão em cada um dos tubos é constante no sentido radial).



$$I_p = 2\pi t \left[(2a)^3 + (3a)^3 \right] = 70\pi t a^3$$

(a) TENSÃO MÁXIMA NO TUBO EXTERNO (τ_2)

INÍCIO DA PLASTIFICAÇÃO : $\tau_2 = \tau_y$

LOGO : $$T_{ELAS} = \frac{\tau_y I_p}{3a}$$

$$\boxed{T_{ELAS} = \frac{70}{3} \pi t a^2 \tau_y}$$

3.0 (~~2.0~~)

(b) EQUILÍBRIO :

$$T = 2\pi t (2a)^2 \tau_1 + 2\pi t (3a)^2 \tau_y$$

SENDO $$\tau_1 = 2a G \frac{\Delta\phi}{L}$$

LOGO

$$\frac{15}{14} \frac{70}{3} \pi t a^2 \tau_y = 2\pi t a^2 \left(8aG \frac{\Delta\phi}{L} + 9\tau_y \right)$$

$$\boxed{\Delta\phi^* = \frac{7}{16} \frac{L}{a} \frac{\tau_y}{G}}$$

2.0 (~~3.0~~)

(c) DESCARREGAMENTO.

$$T = 2\pi t\,(2a)^2\,\tau_1 + 2\pi t\,(3a)^2\,\tau_2$$

ONDE $\tau_1 = 2aG\,\dfrac{\Delta\phi}{L}$ e $\tau_2 = 3aG\left(\dfrac{\Delta\phi}{L} \underbrace{- \dfrac{\Delta\phi^*}{L} + \dfrac{\tau_y}{G}}_{\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{RESIDUAL}}\right)$

TENSÕES RESIDUAIS: $T = 0$

$$4\tau_1 + 9\tau_2 = 0$$

$$8\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} + 27\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} = -27\left(-\frac{\Delta\phi^*}{L} + \frac{\tau_y}{G}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} = -\frac{27}{35}\left(\frac{\tau_y}{G} - \frac{\Delta\phi^*}{L}\right)$$

LOGO:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{54}{35}\,aG\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} \\ \tau_2 &= \frac{24}{35}\,aG\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)_{FINAL} \end{aligned}}$$

(2.0)