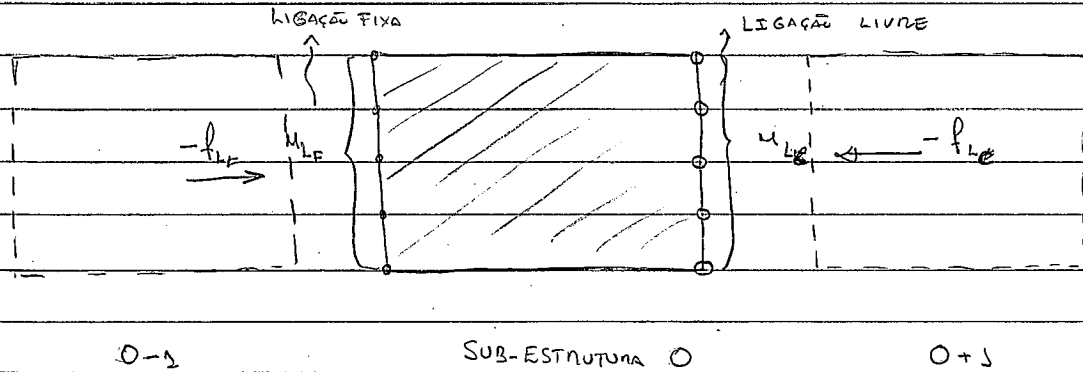


4.3.2) MÉTODOS DE SUB-ESTRUTURAÇÃO



$$M \ddot{u} + K u = F \quad \text{--- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO}$$

P_0 SUB-ESTRUTURA 0 (N GRAUS DE LIBERDADE)

$$\boxed{\bar{M} \ddot{u}_0 + \bar{K} u_0 = \bar{F} - P_F^T f_{LF} - P_L^T f_{LE}}$$

ONDE $M_{LF} = P_F u_{0j}$ $M_{LA} = P_A u_0$

COM $[P_F]_{N \times N_F}$ $[P_L]_{N \times N_L} = I_{N \times N}$ E ASSIM POR DIANTO

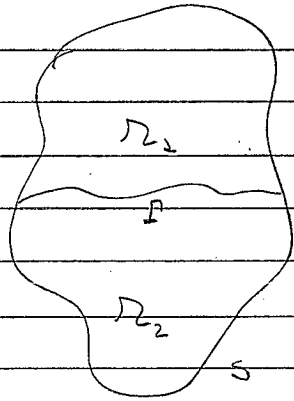
SENDO $[P_0]_{N \times N}$ A MATRIZ QUE DETERMINA A RESTRIÇÃO AOS GRAUS DE LIBERDADE DA SUB-ESTRUTURA 0 (ENTÃO P_F E P_L ESTARIAM INCLUIDAS COMO BLOCOS)

$$\begin{aligned} \bar{M} &= P_0 M P_0^T \\ \bar{K} &= P_0 K P_0^T \\ \bar{F} &= P_0 F \end{aligned}$$

PS: COMO MOSTRAR f_{LF} E f_{LE} FORÇAS DE ITENAÇÃO?



OUTRAS ALTERNATIVAS



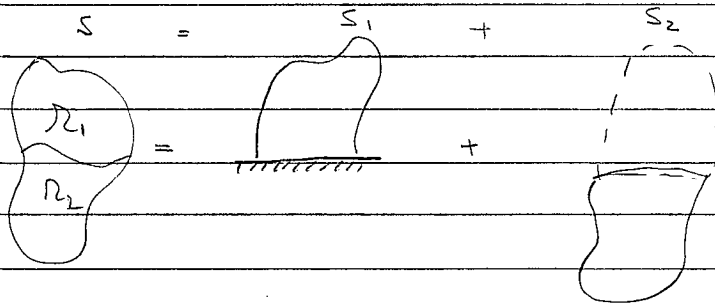
$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{\Gamma} \\ u_2 \end{bmatrix}$$

UMA PRIMEIRA DECOMPOSIÇÃO

$$u = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 - u_1^s(u_{\Gamma}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u^s} + \begin{bmatrix} u_1^s(u_{\Gamma}) \\ u_{\Gamma} \\ u_2 \end{bmatrix}$$

MAIS UMA VEZ, $u_1^s(u_{\Gamma})$ É A RESPOSTA ESTÁTICA DA SUB-ESTRUTURA 1 À IMPOSIÇÃO DE u_{Γ} NA FRONTEIRA DAS 2 SUB-ESTRUTURAS

REPRESENTANDO GRAFICAMENTE



$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2$$

4.3.2.1) MÉTODO DE GUYAN

→ S_2 CONSTITUI UMA REPRESENTAÇÃO DE S

• MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA

DADO Φ_i UM MODO DE FREQUÊNCIA LIVRE DE R_2 :

$$R = \begin{bmatrix} \Phi_i^s \\ u_p(R_2) \\ \Phi_i \end{bmatrix}$$

ENTÃO $K_{ij} = \underbrace{\int_{R_1} \sigma(\Phi_i^s) \epsilon(\Phi_j^s) dR_1}_{R(\Phi_i^s) u_p(\Phi_j^s)} + \underbrace{\int_{R_2} \sigma(\Phi_i) \epsilon(\Phi_j) dR_2}_{K_{E22}}$

↓
DEMONSTRAR

$$M_{ij} = \underbrace{\int_{R_1} \rho \Phi_i^s \Phi_j^s}_{R(\Phi_i^s) u_p(\Phi_j^s)} + \underbrace{\int_{R_2} \rho \Phi_i \Phi_j dR_2}_{M_{E22}}$$

OBS: (i) AS PRIMEIRAS PARCELAS REPRESENTAM "AS CONTRIBUIÇÕES" DA SUB-ESTRUTURA 1 NA RESPOSTA DO SISTEMA

(ii) AS MATRIZES K_{E22} , M_{E22} SÃO DIAGONAIS JÁ QUE Φ_i SÃO MODOS. NO ENTANTO K E M NÃO O SÃO NECESSARIAMENTE.

POR OUTRO LADO:

$$\int_{\Omega} \sigma(v_i^s) \cdot \varepsilon(\Phi_\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\Phi_\alpha) \cdot \varepsilon(v_i^s) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{PARTIÇÃO DA} \\ \text{MATRIZ } \hat{K} \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{1} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \end{array} \right)$$

DEM:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma(v_i^s) = 0 \\ \sigma_m = F \quad x \in \Gamma \\ v_i^s = v_p^i \quad x \in \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{DEFINIÇÃO DE } v_i^s)$$

ENTÃO

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(v_i^s) \cdot \Phi_\alpha = - \int_{\Omega} \sigma(v_i^s) \cdot \varepsilon(\Phi_\alpha) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(v_i^s) / n(\Phi_\alpha) = 0$$

MODO DINÂMICO

DE FRONTEIRA

$$\begin{array}{l} \text{FIXA } \left. \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \\ u(\Phi_\alpha) = 0 \end{array}$$

DA MESMA FORMA: (PROBLEMA BÁSICO DOS MODOS DINÂMICOS DE FRONTEIRA FIXA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma(\Phi_\alpha) + \rho \omega_\alpha^2 \Phi_\alpha = 0 \\ \sigma_m = 0 \quad \partial\Omega - \Gamma \\ \Phi_\alpha = 0 \quad \Gamma \end{array} \right.$$

ENTÃO (JÁ INTEGRANDO POR PARTES)

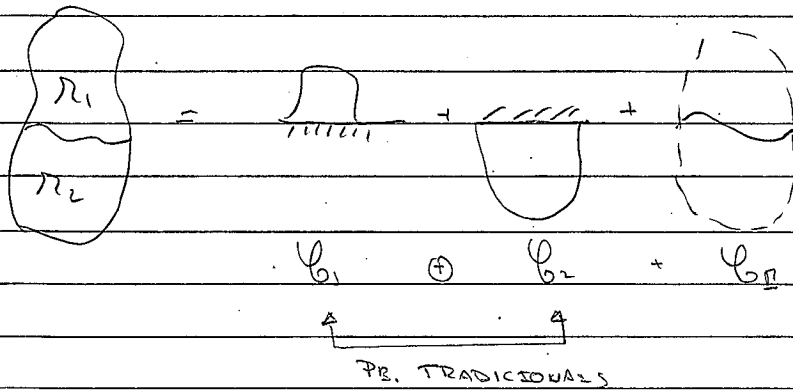
$$\int_{\Gamma} R_\alpha \cdot v_i^s - \int_{\Omega} \sigma(\Phi_\alpha) \cdot \varepsilon(v_i^s) + \omega_\alpha^2 \int_{\Omega} \Phi_\alpha \cdot v_i^s = 0$$

FORÇAS DE REAÇÃO RESULTADO ATENÇÃO

4.3.2.2) MÉTODO DE GRAIG-RAMPTON

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_D \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_1^s(\mu_D) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_2 - \mu_2^s(\mu_D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_2^s(\mu_D) \\ \mu_D \\ \mu_2^s(\mu_D) \end{bmatrix}$$

OU NA FORMA DE DIAGRAMA



(*) IMPEDÂNCIA

CEL: PARA CADA SUB-ESTRUTURA AS "FORMAS GEOMÉTRICAS" A SEREM ASSUMIDAS SÃO DESCRITAS PELOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE FRONTEIRA FIXA E PELOS MODOS ESTÁTICOS DE FRONTEIRA.

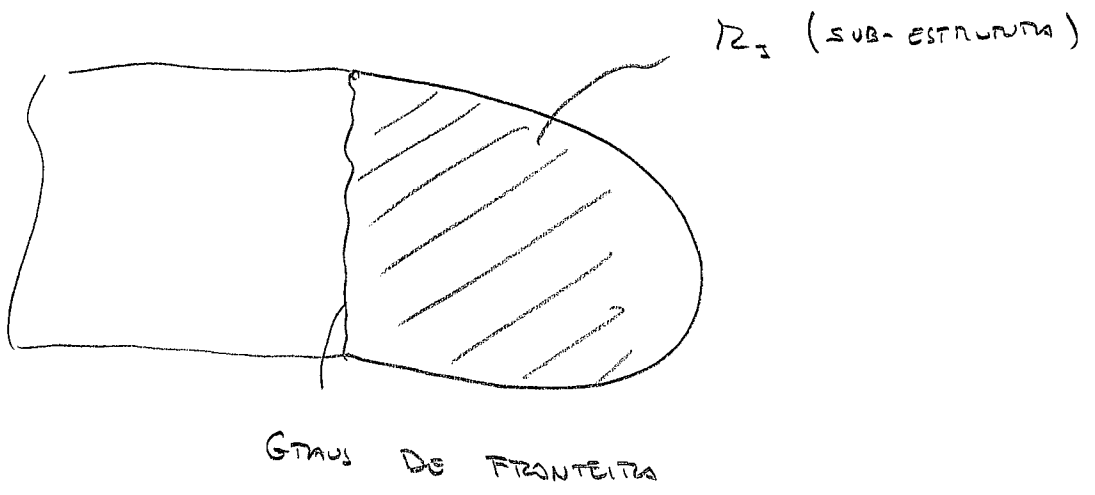
SUB-ESTRUTURAÇÃO → MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_D \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_D \\ b_2 \end{bmatrix}}_g$$

(*) IMPEDÂNCIA MECÂNICA E O MÉTODO DE CRAIG-BAMPTON

$$Z(\omega^2) \underline{u} = \underline{F}$$

ONDE $Z(\omega^2) = K - \omega^2 M$



$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \\ \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix}$$

Logo $\underline{u}_I = -Z_{II}^{-1} Z_{IF} \underline{u}_F$ — CONDENSACÃO NO CASO EM QUE NÃO HÁ FORÇAS EXTERNAS ASSOCIADAS AOS \underline{u}_I

⇓

$$Z_{FF}^*(\omega^2) \underline{u}_F = \underline{F}$$

ONDE $Z_{FF}^* = Z_{FF} - Z_{FI} Z_{II}^{-1} Z_{IF}$ → MODOS DE SUB-ESTRUTURA

POLOS: $Z_{II} \rightarrow \det(Z_{II}) = 0 \rightarrow \det(K_{II} - \omega^2 M_{II}) = 0$

→ DESENVOLVIMENTO ESPECTRAL DA MATRIZ DE IMPEDÂNCIA ↔ "MODOS" ESTÁTICOS DE FRONTEIRA + "MODOS" DE VIBRAÇÃO DE FRONTEIRA ENGASTADA

OBS.: (i) M_F ... MODOS ESTÁTICOS
 M_I ... " DE VIBRAÇÃO } $M_I + M_F = n$

$$\underline{u}^{SUB} = R \begin{bmatrix} \underline{u}_F \\ \underline{u}_I \end{bmatrix} \rightarrow \text{"AMPLITUDES MODAIS"}$$

ONDE $R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{II}^{-1} K_{IF} & \underline{0} \end{bmatrix}$

↳ MATRIZ DE MODOS DE VIBRAÇÃO ENGASTADO ("POSSÍVEL REDUÇÃO")

OBS: TOMANDO UM NÚMERO DE MODOS $< M_I$

PARA SUB-ESTRUTURA:

$$K_{RED} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{FF} & 0 \\ 0 & R_m^2 \end{bmatrix} \cdot e$$

$$M_{RED} = \begin{bmatrix} \overline{M}_{FF} & M_{FM} \\ M_{MF} & I \end{bmatrix}$$

ONDE:

$$\bar{K}_{FF} = K_{FF} - K_{FS} K_{II}^{-1} K_{IF}$$

$$\bar{M}_{FF} = M_{FF} - M_{FI} K_{II}^{-1} K_{IF} - K_{FS} K_{II}^{-1} M_{IF} + K_{IFS} K_{II}^{-1} M_{II} K_{II}^{-1} K_{IF}$$

$$M_{MF} = \bar{\Phi}_M^T (M_{FF} - M_{FI} K_{II}^{-1} K_{IF}) = M_{FM}^T$$

PERGUNTA: EXISTÊNCIA DE K_{II}^{-1} ?

OBS. 1 → OUTROS MÉTODOS DE SUB-ESTRUTURA

→ PQ. CRASS-RAMPON PODERIAM NÃO FUNCIONAR

→ "ASSUMED MODES" (MODOS GEOMÉTRICOS)

→ MONTAGEM COM O SISTEMA GLOBAL

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ | \\ M_F \\ | \\ M_2 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} y \\ | \\ M_F \\ | \\ M_2 \end{bmatrix}$$

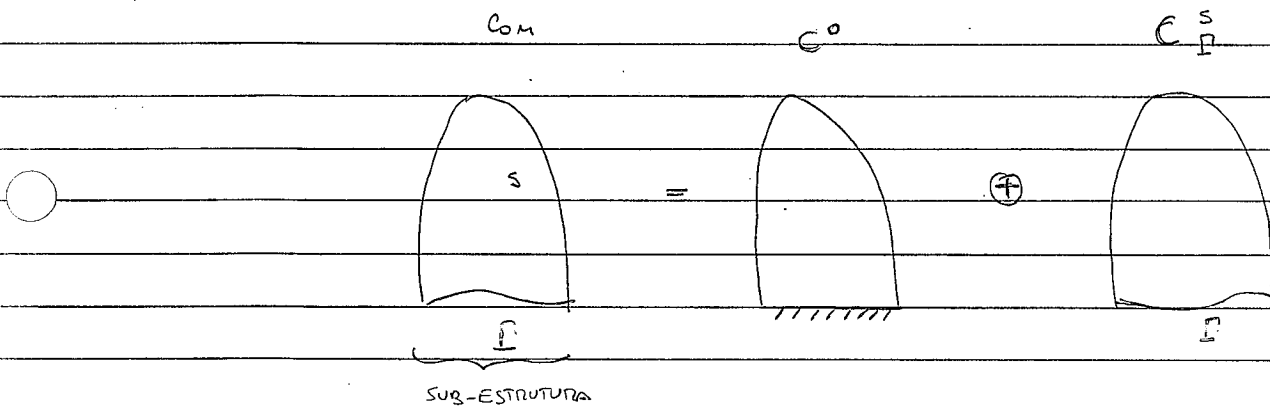
→ CARACTERIZAÇÃO DA SUB-ESTRUTURA I VIA EXPERIMENTOS

OBS: VÁRIOS MÉTODOS SÃO UTILIZADOS NO SENTIDO DE MELHORAR A APROXIMAÇÃO FORNECIDA

PELO MÉTODO REDUZIDO, EM PARTICULAR A ADIÇÃO DE "MODOS ESTÁTICOS" (MOTIVADOS PELO FATO QUE PARA OS MODOS DE MAIS ALTA ORDEM O SISTEMA TENDE A SE COMPORTAR DE FORMA ESTÁTICA), EX: Δ GL $\bar{X} = \frac{\bar{F}}{\omega_M^2 - \omega^2} 1$

SE $\omega \ll \omega_M \rightarrow \bar{X} \approx \frac{\bar{F}}{M \omega_M^2} = \frac{\bar{F}}{K}$ (RESPOSTA ESTÁTICA), OU SEJA,

FORMA USUAL: $u = u^s(u_p) + Ry$ ↑ MODOS DINÂMICOS DE FRONTEIRA FIXA



ENTÃO O PROBLEMA SERIA DESCRITO POR: $u^s(u_p), y, R$

SENDO $u^s(u_p)$ O CAMPO DE DESLOCAMENTOS OBTIDO PELA IMPOSIÇÃO DO DESLOCAMENTO DE FRONTEIRA u_p , CONSIDERANDO-SE APENAS A RESPOSTA ESTÁTICA,

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IF} \\ K_{FI} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_F \end{bmatrix} \rightarrow \text{REAÇÃO DE APOIO}$$

$$u_I = -K_{II}^{-1} K_{IF} u_p$$

$$F_F = K_{FI} u_I + K_{FF} u_p$$

ANALISANDO Δ SUB-SISTEMA

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PS} \\ K_{SP} & K_{SS} \end{bmatrix}}_{K_S} \begin{bmatrix} M_P \\ M_S \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{PP} & M_{PS} \\ M_{SP} & M_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_P \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) MODOS ESTÁTICOS DE FRONTEIRA

$$K_S u = 0 \implies M_S = -K_{SS}^{-1} K_{SP} M_P$$

(2) MODOS DE VIBRAÇÃO DE FRONTEIRA FIXA ($M_P = 0$)

$$K_{SS} M_S = \omega^2 M_{SS} M_S$$

\Downarrow
 Φ_i

LOGO $\bar{K} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{SS}^{-1} K_{SP} & \Phi \end{bmatrix}$

OBS: (1) O MODELO PODE SER REDUZIDO NA MEDIDA EM QUE SE ESCOLHAM APENAS ALGUNS MODOS DE VIBRAÇÃO. NO ENTANTO, NO SENTIDO DE MANTER COMPATIBILIDADE NA FRONTEIRA, TODOS OS MODOS ESTÁTICOS DEVERÃO SER PRESERVADOS

• PARA A ESTRUTURA TODA

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \Phi^1 & | & -K_{SS}^{-1} K_{SP} & | & 0 \\ 0 & | & I_d & | & 0 \\ 0 & | & -K_{SS}^{-1} K_{SP} & | & \Phi^2 \end{bmatrix}$$

• As COLUNAS DA MATRIZ $-K_{FE}^{-1} K_{FF}$ SÃO OS CHAMADOS "MODOS ESTÁTICOS DE FRONTEIRA".

• A PARTIR DA FORMA DA O CAMPO DE DESLOCAMENTOS u INTRODUZIDA ACIMA, DESENVOLVE-SE A SEGUINTE FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE VIBRAÇÕES

$$u^s = \sum_{l=1}^{NGLF} U_l v_l^s \quad \text{ONDE } v_l^s \text{ SÃO ELEMENTOS DE UMA BASE PARA OS MODOS DE FRONTEIRA}$$

OBS: FORMULAÇÃO VARIACIONAL (Pb. HARMÔNICO) ENTÃO $\int_{\Omega} (\sigma(u) \epsilon(v) dx - \omega^2) \rho u \cdot v dx = \int_{\Gamma} F \cdot v d\Gamma$ Kv

$$\begin{bmatrix} K^s & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & & \omega^2 M_x & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \vdots \\ y \\ \vdots \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^s & C \\ \vdots & \\ C^T & \\ \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \vdots \\ y \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{K}} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{M}}$

ONDE $K^s \leftrightarrow \int_{\Omega} \sigma(u^s) \epsilon(v^s) dx$, $M^s \leftrightarrow \int_{\Omega} \rho u^s(v_p) u^s(v_p) dx$

C É UMA MATRIZ $NGLF \times N$
 ↓
 NÚMERO DE MODOS RETIDOS

EM QUE CADA ELEMENTO É DADO POR:

$$[C]_{i\alpha} = \int_{\Omega} \rho v_i^s \cdot \phi_{\alpha} dx$$

↓
modo

$$[C]_{i\alpha} = [C]_{\alpha i}$$