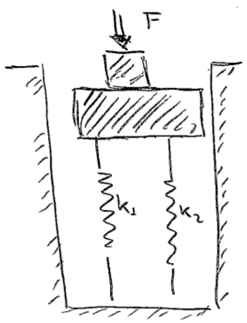
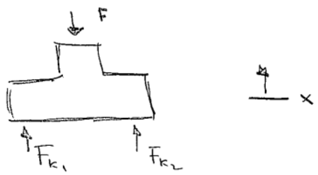
Capítulo II
Mecânica de Sistemas Deformáveis
(alguns exemplos)

Um primeiro exemplo

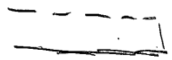


Identificando as forças que atuam no pistão:



$F_{k_1} + F_{k_2} - F = 0$ (como $F_{k_1} \neq F_{k_2}$ → pr. est. indeterminado)

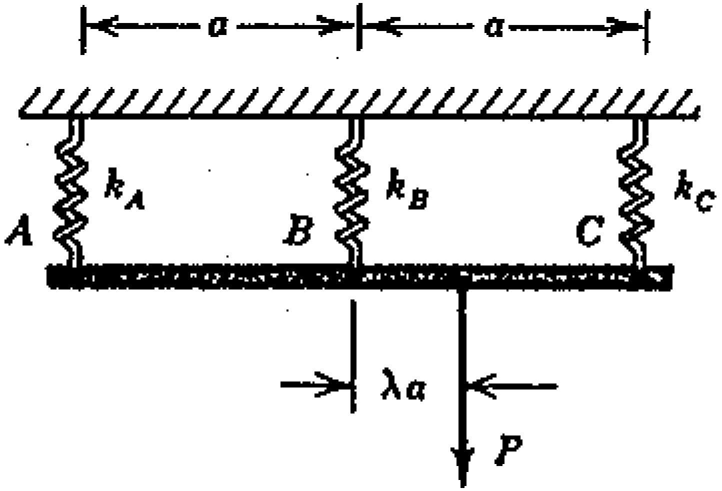
* Deformação (mudança da geometria)



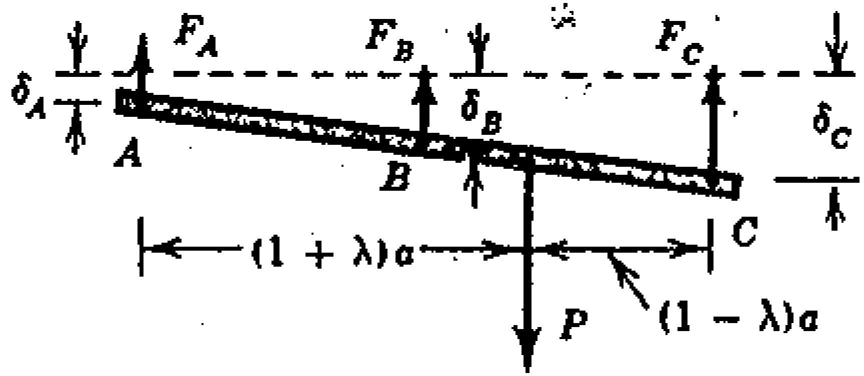
$\delta = \delta_A = \delta_B$ (compatibilidade geométrica)

* Comportamento $F_{k_1} = K_1 \delta$; $F_{k_2} = K_2 \delta$

Logo $F = (K_1 + K_2)\,\delta$



(a)

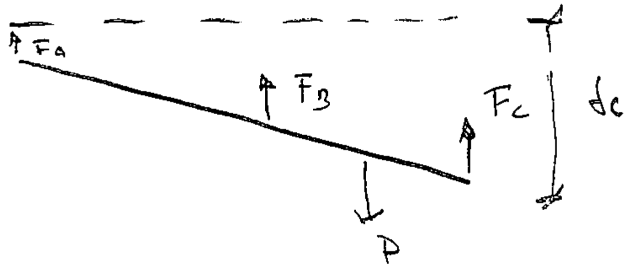


(c)

$-1 \leq \lambda \leq 1$

E, AINDA, $K_A = \frac{k}{2}$; $K_B = K$ E $K_C = \frac{3}{2} K$

DIAGRAMA DE FORÇAS



$$F_A + F_B - F_C - P = 0$$

(3 EQ E 3 INC)

$$\sum M_C = 0 \longrightarrow -F_A(2a) - F_B a + (1-\lambda) a P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow +F_C(2a) - P(1+\lambda)a + F_B a = 0$$

Compatibilidade Geométrica

$$\delta_B = \frac{1}{2}\left(\delta_A + \delta_C\right)$$ (semelhança de triângulos)

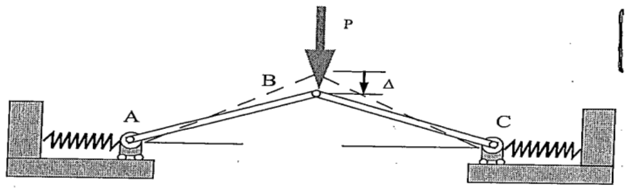
Comportamento das molas

$$\delta_A = \frac{F_A}{K_A} \quad ; \quad \delta_B = \frac{F_B}{K_B} \quad e \quad \delta_C = \frac{F_C}{K_C}$$

Então

$$\delta_A = P \, \frac{2K_C - \lambda\left(K_B + 2K_C\right)}{K_A K_B + 4K_A K_C + K_B K_C}$$

Exemplo "Ilustrativo"



Construir um diagrama (gráfico) da relação P x Δ.

Hipóteses sobre o movimento:

\# A relação entre a força aplicada e as massas envolvidas é de tal ordem que a ação inercial pode ser desprezada → **EQUILÍBRIO**

→ Para relembrar equilíbrio e conceitos correlatos

Resolver o exercício em anexo (3D)

\# O deslocamento Δ é suficientemente pequeno para que as relações geométricas envolvidas possam ser linearizadas ($\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$)

— Dados do problema:

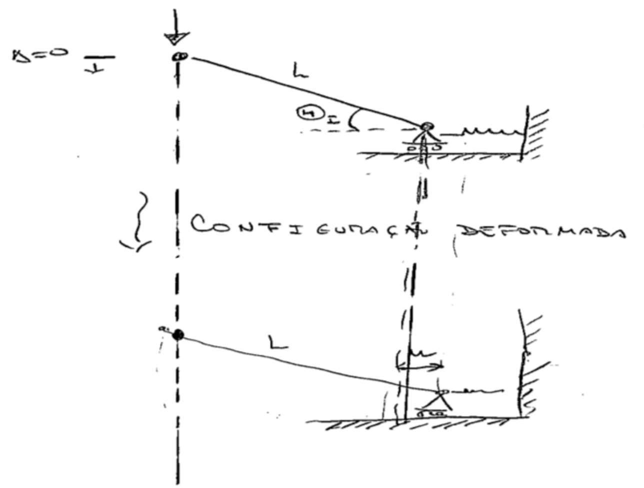
- Barras são rígidas e de comprimento L
- Constantes de mola = K
- Graus de liberdade definidos na figura

Solução:

"Geometria da Deformação"

(Simetria)

Configuração Inicial



Compressão na mola $u = L\cos\Theta_F - L\cos\Theta_I$

Como relacionar Θ_I com Δ? → pode ser considerado um dado do problema

(ou u com Δ)

Note que $\Delta = L \,\text{sen}\, \Theta_I - L \,\text{sen}\, \Theta_F$

$$\Delta = L\,(\text{sen}\,\Theta_I - \text{sen}\,\Theta_F)$$

Por outro lado $\Theta_F = \Theta_I - \gamma$ → rotação

Segundo a hipótese de "pequenas modificações" $\gamma << \Theta$ no

$$\text{sen}\,\Theta_F = \text{sen}\,(\Theta_I - \gamma) = \text{sen}\,\Theta_I \cos\gamma - \text{sen}\,\gamma \cos\Theta_I$$

Logo: $\Delta = L\,\gamma \cos\Theta_I$

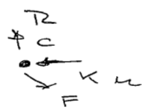
E, ainda

$$M = L\,(\cos\Theta_F - \cos\Theta_I) = L\,(\cos\Theta_I + \gamma\,\text{sen}\,\Theta_I - \cos\Theta_I)$$

$$M = L\,\gamma\,\text{sen}\,\Theta_I$$

Portanto $\boxed{\dfrac{M}{\Delta} = \text{tg}\,\Theta_I}$

→ Agora analisando o equilíbrio



(Como assim?)

Logo:

$$P = 2F \operatorname{sen} \Theta_F$$

e

$$F \cos \Theta_F = k\,u$$

$$\Rightarrow \quad P = 2 \operatorname{tg} \Theta_F \, k\, u$$

$$\Downarrow$$

$$P = 2 \operatorname{tg} \Theta_F \, k \operatorname{tg} \Theta_I \, \Delta$$

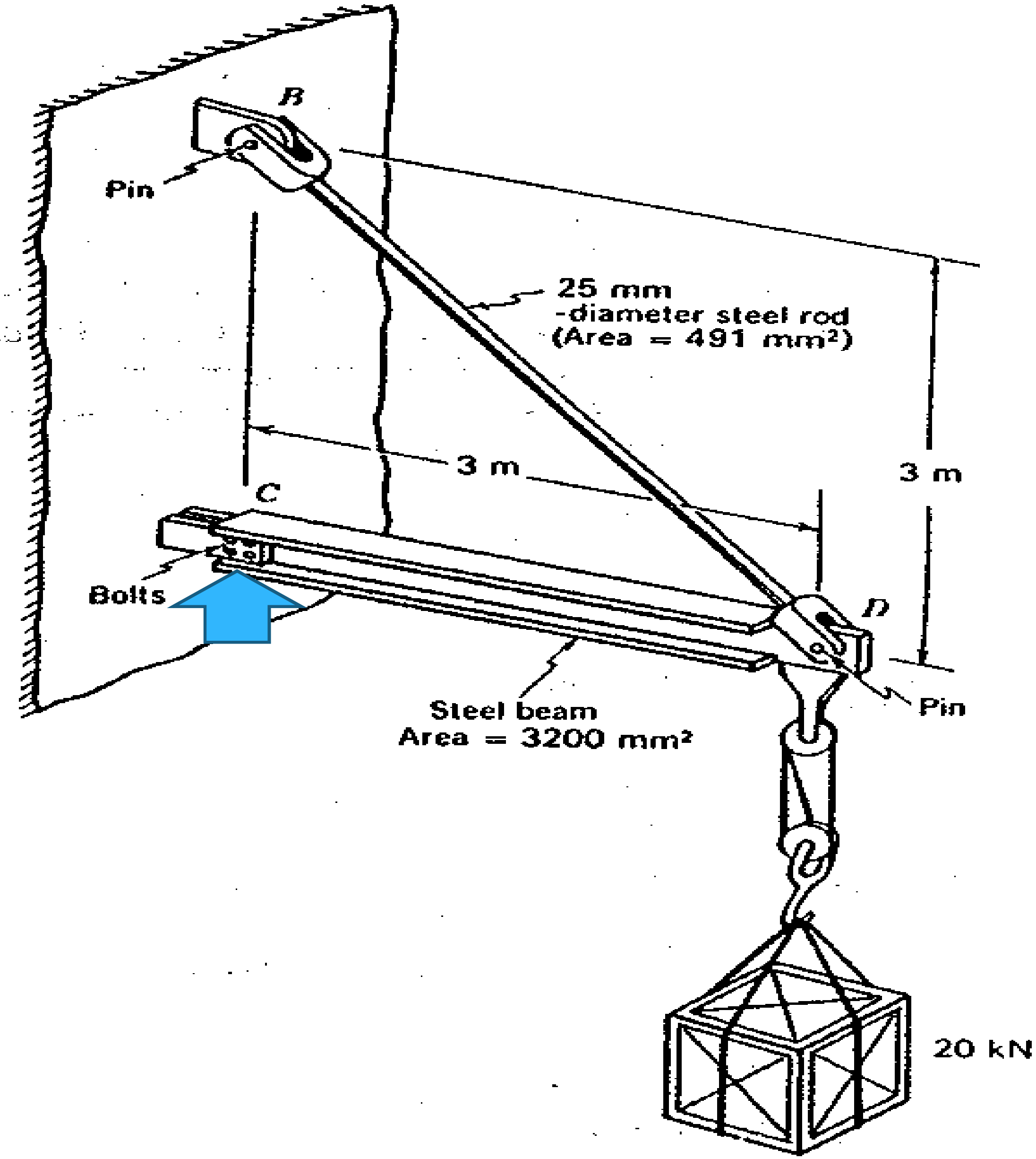
Ou, ainda

$$P = 2k \operatorname{tg} \Theta_I \left[\frac{L \operatorname{sen} \Theta_I - \Delta}{L \cos \Theta_I + u} \right] \Delta$$

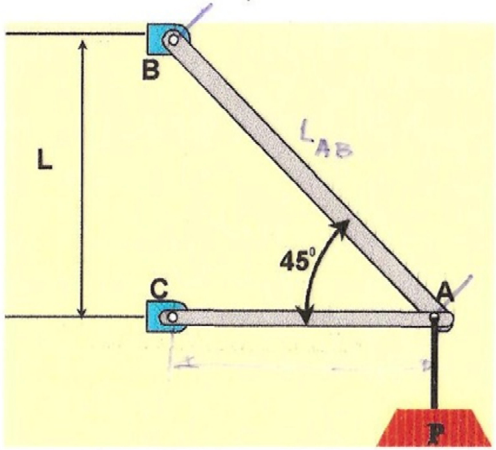
$\Delta \approx 0$ e $u \approx 0$ (admitir $\Theta_I < 45°$ por que?)

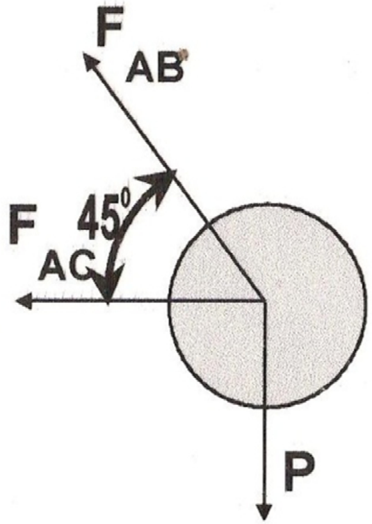
$$P = 2k (\operatorname{tg} \Theta_I)^2 \, \Delta$$

Como seria sem as aproximações?


B
Pin
25 mm
-diameter steel rod
(Area = 491 mm²)
3 m
3 m
C
D
Bolts
Pin
Steel beam
Area = 3200 mm²
20 kN

BARRAS: EQUILÍBRIO E CINEMÁTICA





EQUILÍBRIO

$$F_{AB}\frac{1}{\sqrt{2}} = P \qquad \Rightarrow F_{AB} = \sqrt{2}P$$

$$F_{AB}\frac{1}{\sqrt{2}} + F_{AC} = 0 \quad \Rightarrow F_{AC} = -P$$

Cinemática e Constitutiva

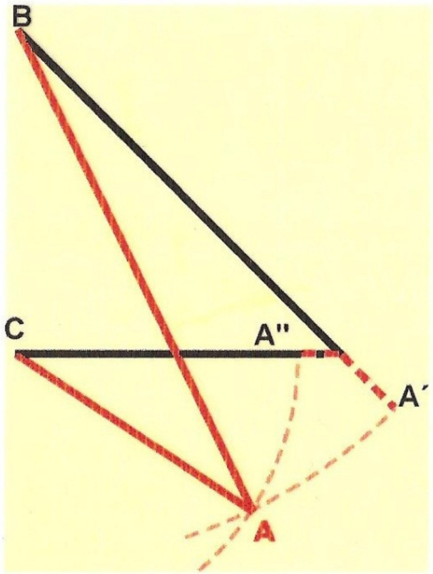
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \delta = \varepsilon_x L \qquad \sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$

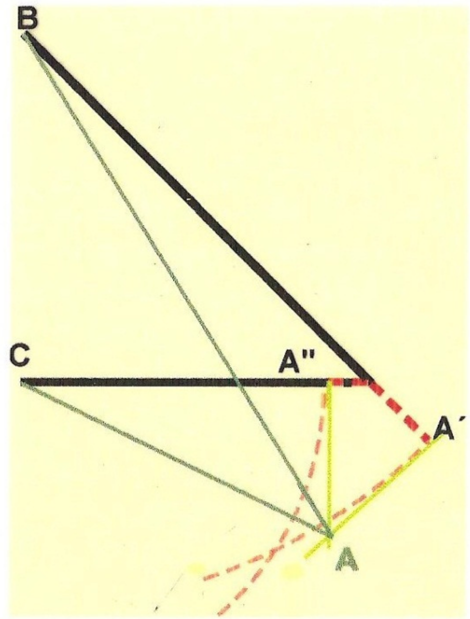
$$\delta_{AB} = \frac{\sqrt{2}P(\sqrt{2}L)}{EA} = \frac{2PL}{EA}$$

$$\delta_{AC} = \frac{-PL}{EA}$$

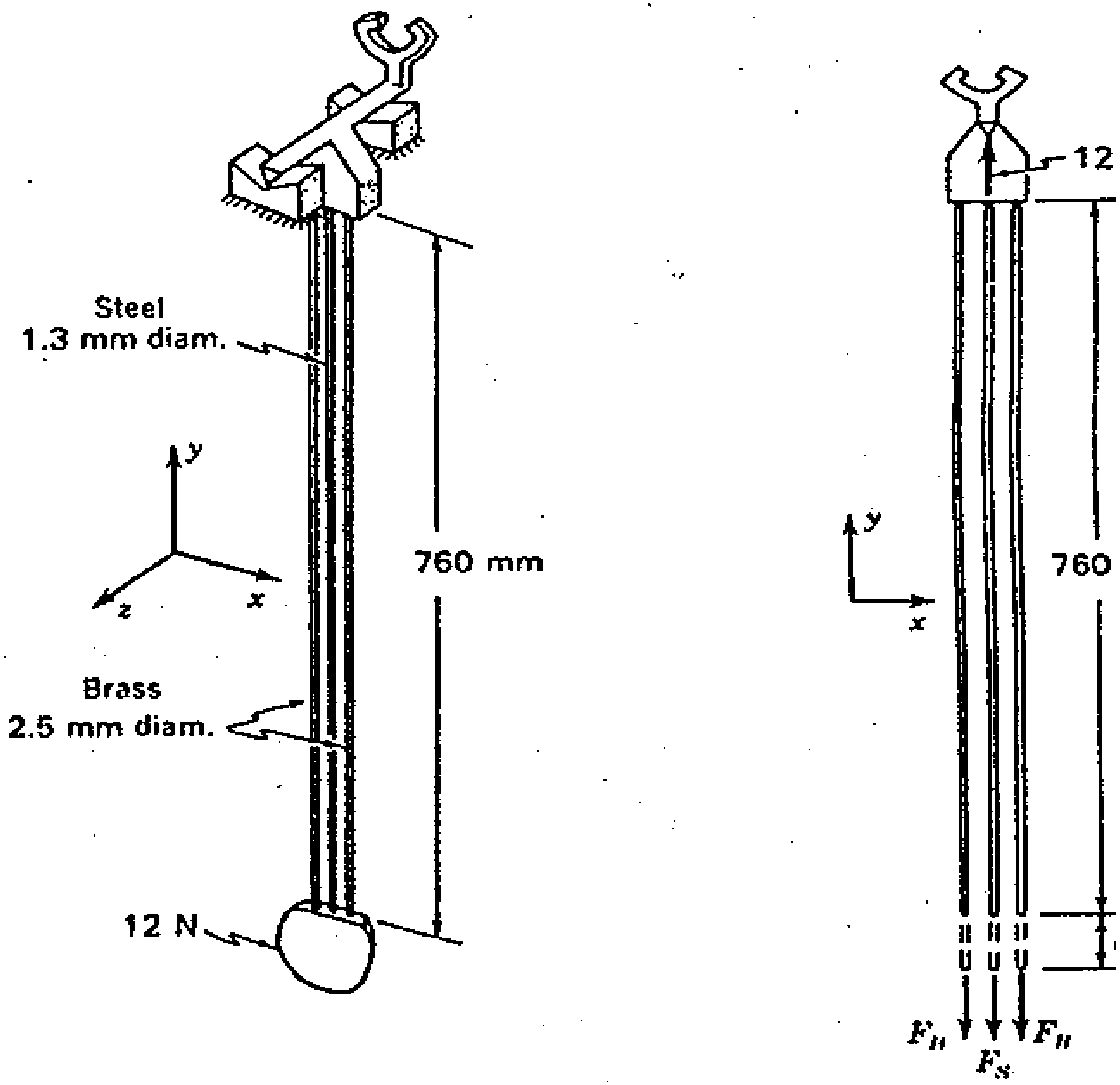
CINEMÁTICA



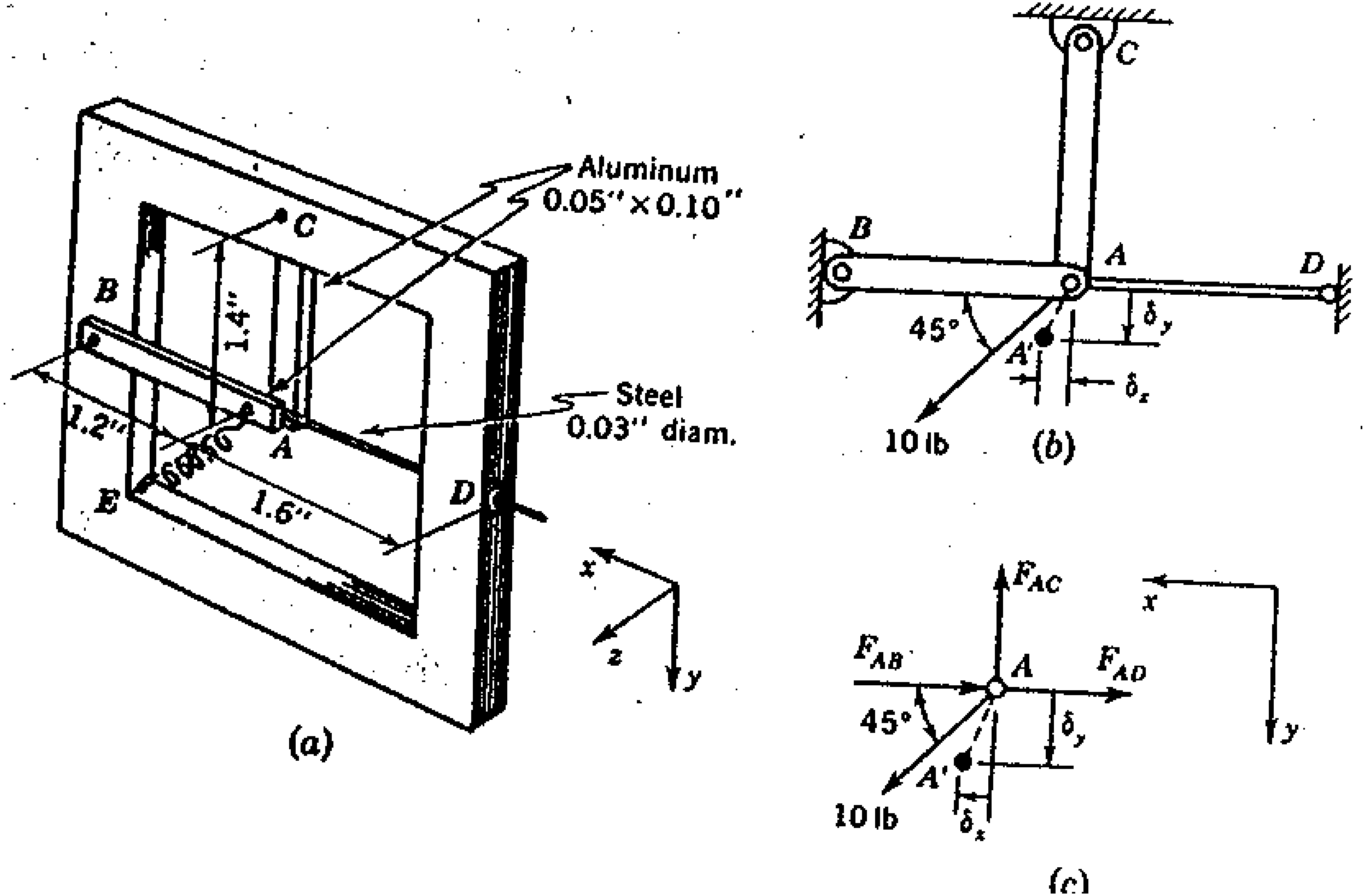
Configuração exata



Configuração aproximada
(pequenas rotações)



(a) (b)


Aluminum
0.05″ × 0.10″
Steel
0.03″ diam.
C
B
A
D
E
1.4″
1.2″
1.6″
Spring
x
z
y
(a)
C
B
A
D
45°
A′
δy
δx
10 lb
(b)
F_AC
F_AB
F_AD
A
45°
A′
δy
δx
10 lb
x
y
(c)

$\delta_{AC} = \delta_y$ extension

$\delta_{AD} = \delta_x$ extension

$\delta_{AB} = \delta_x$ compression

RELATION BETWEEN FORCES AND DEFORMATIONS

$$\delta_{AC} = \left(\frac{FL}{AE}\right)_{AC} = \frac{7.07(1.4)}{0.005(10 \times 10^6)} = 0.00020 \text{ in.}$$

$$\delta_{AD} = \left(\frac{FL}{AE}\right)_{AD} = \frac{F_{AD}1.6}{0.00071(30 \times 10^6)}$$

$$\delta_{AB} = \left(\frac{FL}{AE}\right)_{AB} = \frac{F_{AB}1.2}{0.005(10 \times 10^6)}$$

Solving (*a*), (*b*), and (*c*) simultaneously, we obtain

$F_{AD} = 1.72$ lb tension

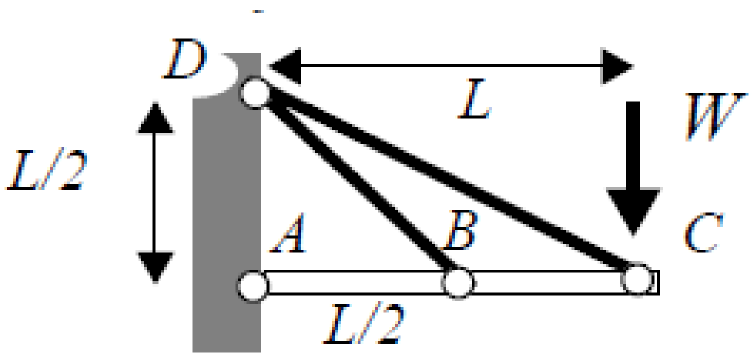
$F_{AB} = 5.35$ lb compression

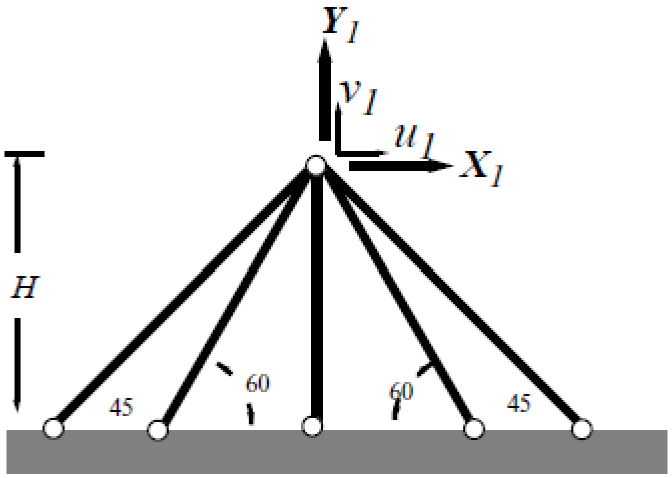
$\delta_y = 0.00020$ in.

$\delta_x = 0.00013$ in.

Treliças

Engineering Mechanics of Solids - Prof. Louis Bucciarelli - MIT

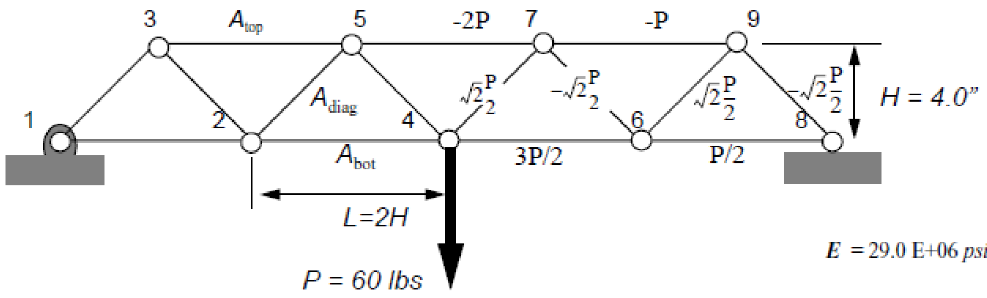




$A_{top} = 0.01227\ in^2$

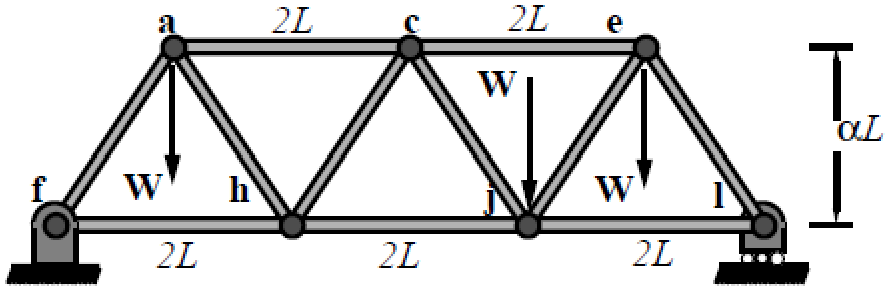
$A_{diag} = 1.09\ A_{top}$

$A_{bot} = 2.35\ A_{top}$

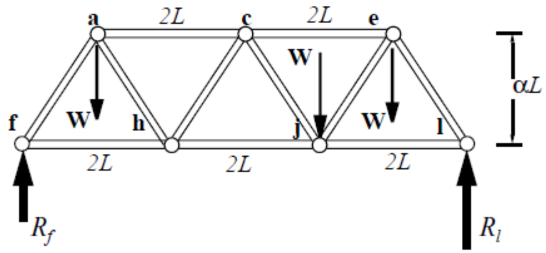


$E = 29.0$ E+06 *psi*

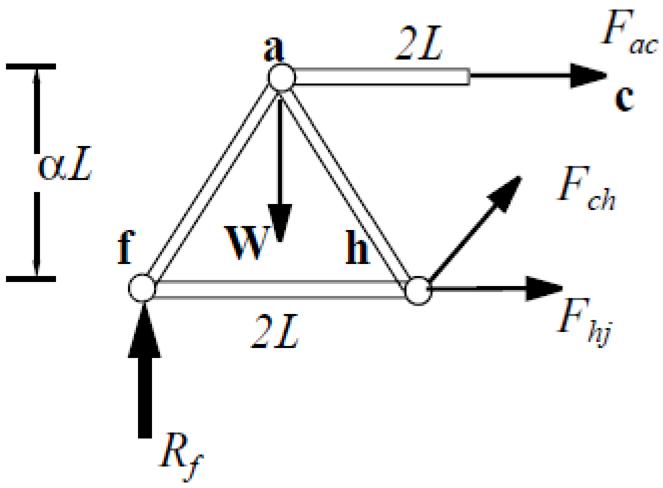
Exercício



O sistema é estaticamente determinado??? Calcule as reações no apoio ...



Calculando as forças atuantes em cada barra...



$$\Sigma M_h = 0; \quad F_{ac}(\alpha L) + R_f(2L) = W(L)$$

$$F_{ac} = -\frac{5W}{3\alpha}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_f + F_{ch}(\sin\theta) = W$$

$$F_{ch} = -\frac{W}{3(\sin\theta)}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{ac} + F_{ch} + F_{hj} = 0$$

$$F_{hj} = \frac{5W}{3\alpha} + \frac{W}{3(\sin\theta)} = \frac{W}{3}\left[\frac{5}{\alpha} + \frac{1}{\sin\theta}\right]$$

Sistematizável --- que tal usar um computador!