\# VOLTANDO À EQ. DE PROPAGAÇÃO EM BARRAS:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\ddot{u} \qquad \left(c^2 = \frac{E}{\rho} \right)$$

AVALIANDO UMA SOLUÇÃO DO TIPO $u = \hat{u}\, e^{i\omega t}$ (ONDE $\hat{u}$ É UM NÚMERO COMPLEXO E ESTE CAMINHO EQUIVALE À UTILIZAR A TRANSFORMADA DE FOURIER: "REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL")

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{u} = 0$$

OU, AINDA

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + k^2\hat{u} = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \right)$$

OBVIAMENTE, $U e^{-ikx}$ E $U e^{ikx}$ SÃO SOLUÇÕES DA EQ. ACIMA, DE FORMA QUE

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ... COMPRIMENTO DE ONDA

$u(x,t)$ É DADA PELA "COMPOSIÇÃO" DE COMPONENTES FREQUENCIAIS

$$C_1(\omega)\, e^{-i\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)} + C_2(\omega)\, e^{i\omega\left(\frac{x}{c} + t\right)}$$

→ "ONDAS" INDO P/ ESQUERDA E DIREITA

OBS.: (1) Os coeficientes C_1 e C_2 são obtidos a partir das condições iniciais (série de Fourier)

(2) A velocidade de propagação, neste caso, não depende das frequências de excitação ω

(3) Dispersão: vejamos a equação

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{c^4}\ddot{u} = 0$$ (flexão em vigas)

"Tentando" a solução $U e^{-i(kx-\omega t)}$

Temos a "eq. característica": $\left[k^4 - \frac{\omega^2}{c^4}\right] U = 0$

que tem como raízes: $k^2 = \pm \frac{\omega}{c^2}$

Correspondendo a quatro modos de propagação:

$k_1 = \frac{\sqrt{\omega}}{c}$; $k_2 = -\frac{\sqrt{\omega}}{c}$; $k_3 = i\frac{\sqrt{\omega}}{c}$; $k_4 = -i\frac{\sqrt{\omega}}{c}$

ou seja

$u(x,t)$ é uma combinação de

$C_1 e^{-i\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x - \omega t\right)}$; $C_2 e^{i\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x - \omega t\right)}$;

$C_3 e^{\left(-\frac{\sqrt{\omega}}{c}x + i\omega t\right)}$; $C_4 e^{\frac{\sqrt{\omega}}{c}x + i\omega t}$

LOGO A VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO (TAMBÉM CONHECIDA POR VELOCIDADE DE FASE) É DADA POR

$$\boxed{C^{FASE} \equiv \frac{w}{k} = \frac{\sqrt{w}}{c}}$$

VARIA COM A FREQUÊNCIA

IMPORTANTE NOTAR QUE OS DOIS ÚLTIMOS MODOS CONSTITUEM ONDAS EVANESCENTES.

OBS: NO CASO DE ONDAS GERADAS A PARTIR DE PERTUBAÇÕES INICIAIS O "CONTEÚDO FREQUENCIAL" É DADO POR ESTAS. ASSIM, PELO MENOS FORMALMENTE, É POSSÍVEL ESCREVER O DESLOCAMENTO NA BARRA ATRAVÉS DE

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{-iw_k\left(\frac{x}{c}-t\right)} + \sum' --$$

ONDE $\sum'$ CONTÉM O EXPECTRO DA EXCITAÇÃO, VISTO AQUI COMO UM CONJUNTO DISCRETO.

CASO FORÇADO — BARRA SEMI-INFINITA :

$$\sigma A(x=0) = -P = +EA \frac{du}{dx}$$

ENTÃO (NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA)

$$EA\frac{d}{dx}\sum' \hat{u}_m e^{i\omega_m t} = -\sum' \hat{P}_m e^{i\omega_m t}$$

logo :

$$\boxed{EA\frac{d\hat{u}}{dx}(x=0) = -\hat{P}_m}$$ (CONDIÇÃO DE CONTORNO)

DADO QUE A SOLUÇÃO AGORA SERÁ DE UMA ONDA PROPAGANDO-SE PARA DIREITA, TEM-SE

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{EA}\sum_m' \frac{\hat{P}_m}{i k_m} e^{-i(k_m x - \omega_m t)}}$$

REFLEXÃO

A "ONDA" ANTERIOR SE PROPAGARÁ ATÉ ENCONTRAR UM "OBSTÁCULO" (DESCASAMENTO DE IMPEDÂNCIAS). POR EXEMPLO UMA EXTREMIDADE LIVRE:

$$\sigma(x=L) = 0 \longrightarrow EA \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

COMO A SOLUÇÃO PASSA A SER: NO INSTANTE QUE A ONDA ATINGE O OBSTÁCULO

$$u(x,t) = \sum A e^{-i(k_n x - \omega t)} + \underbrace{\sum B e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{ONDA REFLETIDA}}$$

TEM-SE PARA CADA FREQUÊNCIA:

$$A = B$$ (BASTA UTILIZAR A CONDIÇÃO DE TENSÃO NULA)

E, AINDA, EM TERMOS DE TENSÃO O PULSO REFLETIDO TEM SENTIDO CONTRÁRIO.

NO OUTRO EXTREMO, O CASO ENGASTADO, $B = -A$ E $\sigma_r = \sigma_i$