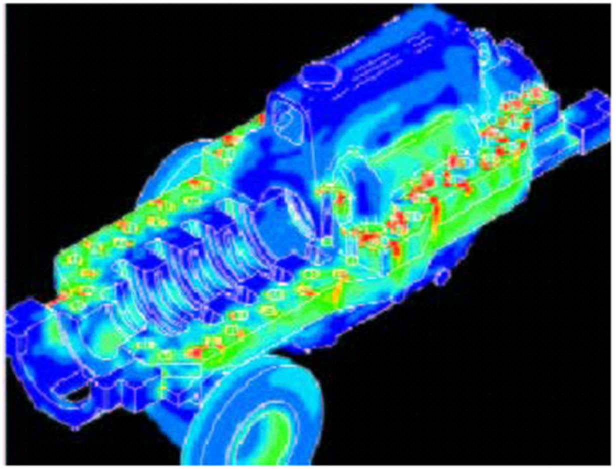
Modelagem Computacional de Problemas Multi-Física

Prof. Fernando A. Rochinha (faro@mecanica.coppe.ufrj.br)

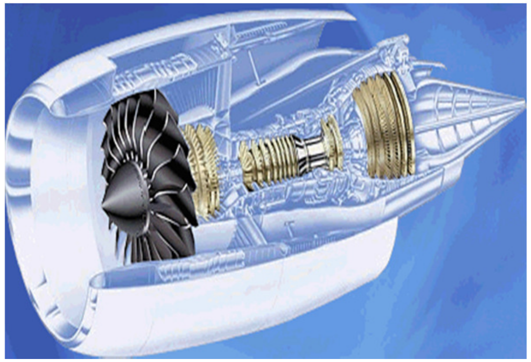
3ª e 5ª - 8:00 h – 10:00 h

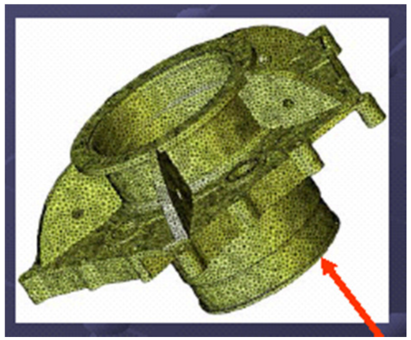
G-219

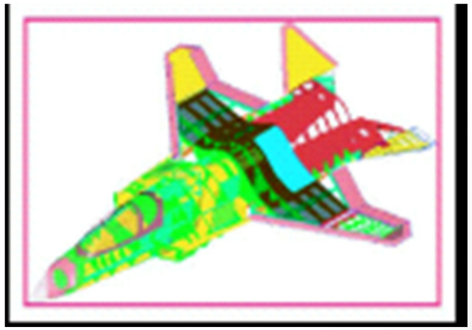
Porque Multi-Física



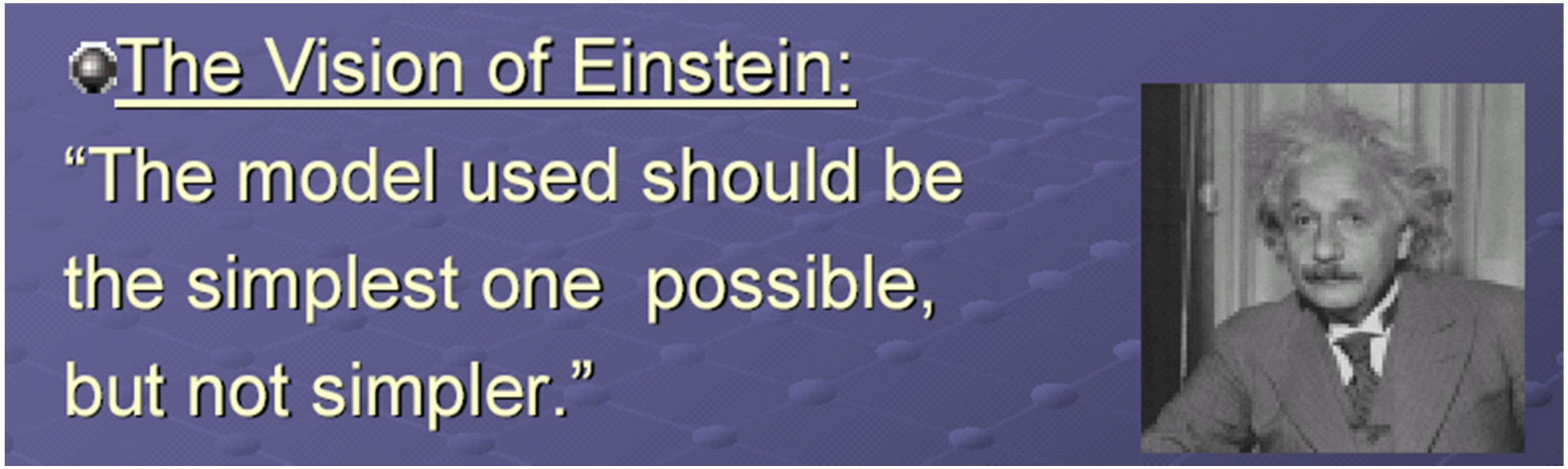
ABAQUS, Inc







Modelagem...



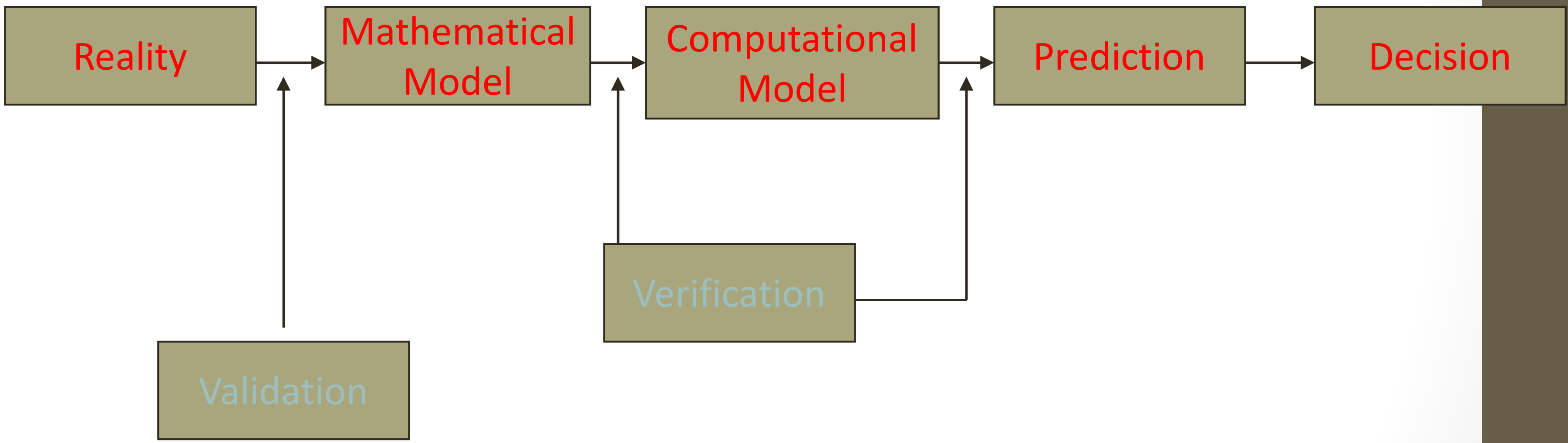
Modelo : construir uma representação matemática (incluindo sua solução através de técnicas computacionais) do comportamento de um sistema , sintetizando a relação entre o estímulo (entrada) e a resposta do sistema a esse conjunto de estímulos.

Simulation – Based Engineering Science

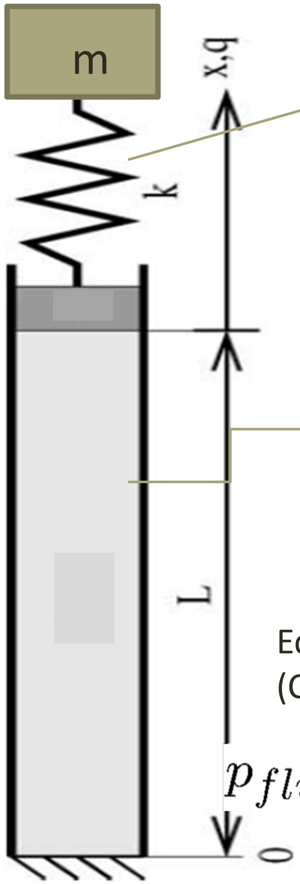
*"… Can computer predictions be used as a reliable tool bases for crucial decisions? How can one assess the accuracy or validity of a computer prediction? What **confidence can be assigned to a computer prediction** of a complex event ? "*

Ivo Babuska and J. Tinsley Oden

Simulation – Based Engineering Science: Schematic View



Interação Fluido-Estrutura : O problema do Pistão



Equação Constitutiva

$$F_k = k(q - x)$$

Gás Ideal

Equação de Estado (Constitutiva) :

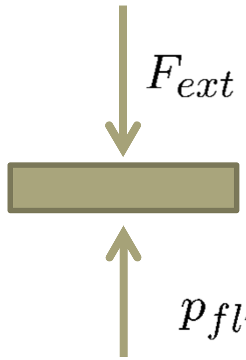
$$p_{fluido} V = Cte(T)$$

Calcular a configuração de equilíbrio

(mas o que significa configuração de equilíbrio?)

Geometria da Deformação 1D (simples neste caso): dois graus de liberdade – x (definindo a posição do pistão) e q (definindo o movimento relativo da massa m).

Equilíbrio :



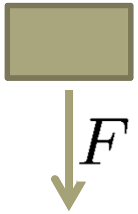
$$F_{ext} = F_k + p_{atm} A$$

$$p_{fluido} A$$

$$p_{fluido} A = F_k + p_{atm} A$$

$$pA = (p_{fluido} - p_{atm}) A = F_k$$

Ainda Equilíbrio



$$F = -F_k + mg = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x - q = \frac{mg}{k}$$

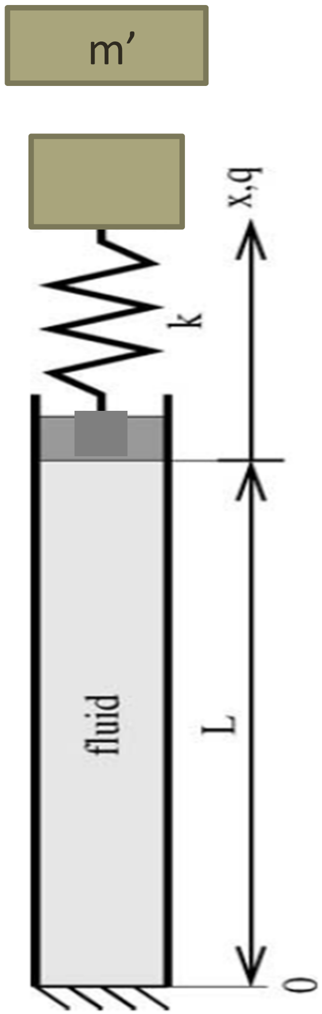
$$\Downarrow$$

$$pV = cte(T) = k(q-x)(L+x) = -mg(L+x)$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{cte(T)}{mg} - L \quad \Longrightarrow \quad q = x + \frac{mg}{k}$$

E se agora uma segunda massa (m’) fosse adicionada ou jogada...



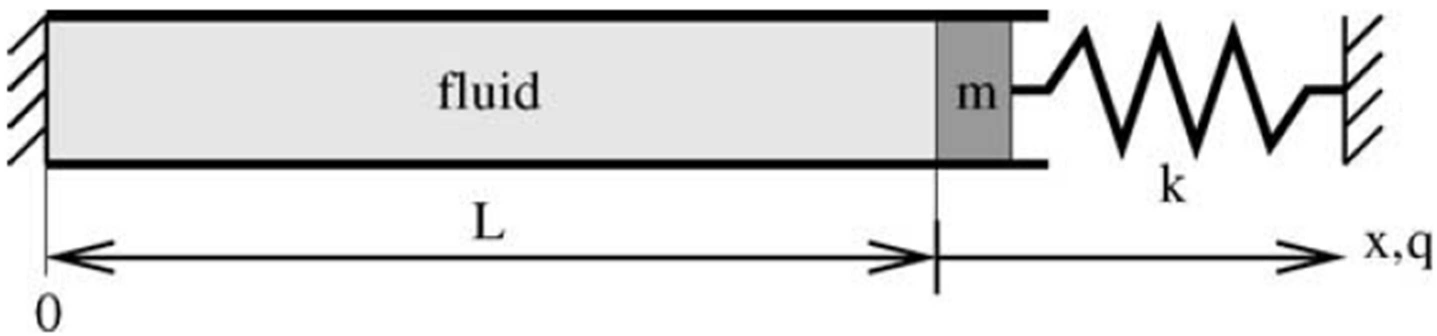
Equilíbrio (mtotal = m + m’) ????

Se é verdade, aonde foi parar a energia cinética inicial??

Quais seriam os mecanismos dissipativos presentes ??

Este é um bom momento para rever todas as hipóteses que foram usadas anteriormente...

Um modelo para além do equilíbrio



Problema Acoplado : Interação fluido Estrutura
(escoamento do fluido – vibrações (dinâmica do sólido)

Obs.: neste caso estamos adimitindo um sólido discreto (um grau de liberdade), mas um fluido como um contínuo (infinitos graus de liberdade)

Análise Acoplada

Sólido (hip. Básicas: pequenas deformações + modo dominante na resposta)

$$m\ddot{q} + kq = f_{ext}$$

Fluido (equações de balanço para um fluido não viscoso, escoamento isoentrópico e unidimensional)

- Balanço de massa (continuidade)
- Balanço de momento
- Equação constitutiva
- Balanço de Energia

Acoplamento - interação acontece somente na fronteira entre fluido e sólido

$$u(x = L + q) = q$$

$$f_ext = pA = (p_{fluido} - p_{atm})A$$

O que queremos calcular?

- Variáveis de interesse normalmente são funções das variáveis básicas : velocidade u(x,t) e pressão p(x,t) no fluido e posição q(t) e velocidade $\dot{q}(t) = \frac{\partial q}{\partial t}$ do sólido

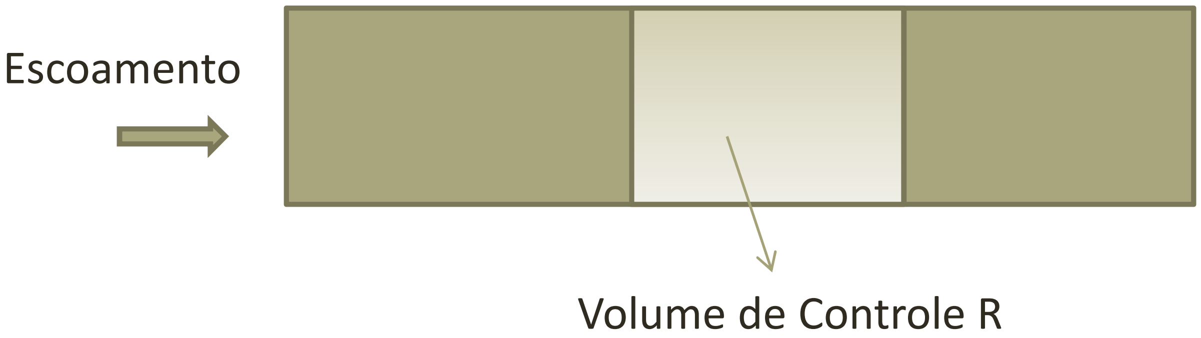
- Em ambos os casos, fluido e sólido, é necessário resolver equações diferenciais parciais... Como?

- Antes de resolvê-las, é preciso formulá-las.

- ***Usualmente, os sólidos são abordados através de uma formulação Lagrangeana. Já os modelos de escoamentos, quase sempre, são construídos usando uma visão Euleriana***.

Leis de Balanço para Fluidos

Balanço de Massa:



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R \rho(x,t)dx + \int_{\partial R} \rho u.nds = 0$$

$$\int_R (\dot{\rho} + div(\rho u))dx = 0 \Longrightarrow \dot{\rho} + div(\rho u) = 0$$

OU

Derivada Material $\quad \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \; div(u) = 0$

Equações para um Fluido Compressível (1 D) – Gás Ideal (processo adiabático)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

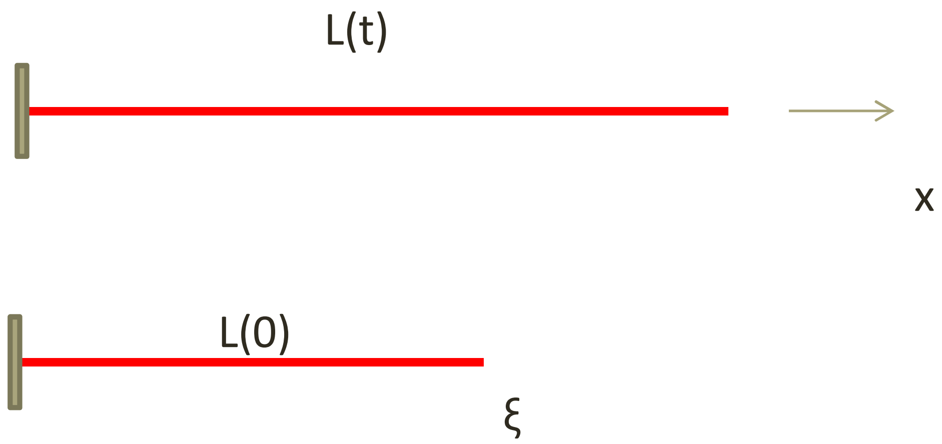
$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p)u}{\partial x} = 0$$

Onde a energia e é dada por : $$e = C_v T + \frac{u^2}{2}$$

e : $$p(x,t) = \rho(x,t)\mathcal{R}T = (\gamma - 1)(\rho e - 0.5\rho v^2)$$

Só que neste exemplo o domínio ocupado pelo escoamento varia com o tempo...

Nesse caso, iremos utilizar uma formulação ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) – Introdução de um novo observador



Para esta escolha a transformação depende do movimento e, portanto, não é conhecida

$$x(t) = \frac{L(t)}{L(0)}\xi$$

$$J_t = \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

Duas possibilidades : escrever as equações de balanço no domínio fixo ((0,L(0)) ou no domínio variável (0,L(t)) – implicações na solução do problema

Balanço de Massa em um volume de controle móvel

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_t}\rho \; dV_t = \int_{S_t}\rho u_o.n - \rho v.n \; dS_t$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial J_t\rho}{\partial t} + J_t\frac{\partial \rho(v-u_o)}{\partial x} = 0$$

$$\int_{V_t} f(x,t)\; dV_t = \int_{V_0} f(x(\xi,t),t)\; J_t \; d\xi$$

Equações de Balanço
Forma Vetorial

$$\frac{\partial}{\partial t} J_t \mathbf{U} + J_t \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{F} - u_o \mathbf{U}) = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p) v \end{bmatrix}$$

$$p(x,t) = \rho(x,t)\mathcal{R}T = (\gamma - 1)(\rho e - 0.5\rho v^2)$$

Considerações sobre o Modelo Matemático

- O problema pode ser resolvido, uma vez conhecida a velocidade do êmbolo (define o domínio móvel) tanto em x como em ξ.
- São necessárias condições iniciais e de contorno para que o problema faça sentido.
- O problema é não linear e de fronteira móvel.
- A velocidade do êmbolo não é conhecida, mas faz parte do problema. Na interface gás – estrutura :

$$v(x = L(0) + q) = \dot{q}$$

Processo Isoentrópico o problema é reduzido a duas variáveis

Olhando para o exemplo apresentado, que tipo de conhecimento e necessário para tratá-lo

- Conceitos matemáticos associados a equações diferenciais
- Ferramentas matemáticas que são usadas na solução numérica dos problemas
- Conceitos básicos em Mecânica dos Fluidos
- Conceitos básicos em Mecância de Corpos Deformáveis
- Termodinâmica
- Técnicas de aproximação numérica

Alguns desses itens podem ser parcialmente substituídos quando programas comerciais são usados. Mas todos serão necessários para fase fundamental : análise e interpretação dos resultados.

Lista de Exercícios 1

Equação de balanço para a estrutura

$$m\ddot{q} + kq + c\dot{q} = f(t)$$

Interação fluido-estrutura

Força na interface

$$f(t) = p(t)A \quad (p(t) = p_f(t) - p_{atm})$$

Compatibilidade cinemática

$$V_f(t) = A(L_0 + q(t))$$

como $p_f(t) = \frac{p_0 V_0^\gamma}{V_f(t)^\gamma}$

$$m\ddot{q} + kq + c\dot{q} = \frac{p_0 V_0^\gamma A}{A^\gamma (L_0 + q(t))^\gamma} - p_{atm} A$$

E.D.O. não linear de 2^a ordem . COMO RESOLVER???

Problema Linearizado

$$\ddot{q} + w^2 q - B(L_0 + q(t))^{-\gamma} = -\frac{p_{atm}A}{m}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad B = \frac{p_0 V_0^{\gamma} A}{m A^{\gamma}}$$

$$\bar{q} = \frac{q}{L_0} \qquad \bar{t} = t\frac{c_0}{L_0}$$

$$\ddot{\bar{q}} + \left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2 w^2 \bar{q} - \left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2 \frac{p_0 A}{m}(1+\bar{q})^{-\gamma} = -\frac{p_{atm}}{m} A \left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2$$

Problema Linearizado

$$\ddot{\bar{q}}+\left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2 w^2\bar{q}-\left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2\frac{p_0 A}{m}(1+\bar{q})^{-\gamma}=-\frac{p_{atm}}{m}A\left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2$$

Configuração de Equilíbrio

$$\bar{q}=0 \qquad p_0=p_{atm}$$

linearizando

$$\bar{q}=\bar{q}(0)+\bar{\delta q}+O(\bar{\delta q}^2)$$

$$\ddot{\bar{\delta q}}+\left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2 w^2\bar{\delta q}+(\gamma-1)\left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2\frac{p_0 A}{m}\bar{\delta q}=0$$

Problema Linearizado

$$\ddot{\bar{\delta}}q + \left(\frac{L_0}{c_0}\right)^2 \tilde{w}^2 \bar{\delta}q = 0$$

$$\tilde{w}^2 = w^2 + (\gamma - 1)\frac{p_0 A}{m}$$

Transformando a equação em um sistema de primeira ordem

$$\dot{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\delta}}q \\ \ddot{\bar{\delta}}q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{L0}{c0}\right)^2 \tilde{w}^2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underline{u}$$

Resolvendo numericamente...

Euler Explícito

$$\underline{u}_{n+1} = (I + A * dt)\underline{u}_n$$

Euler Explícito

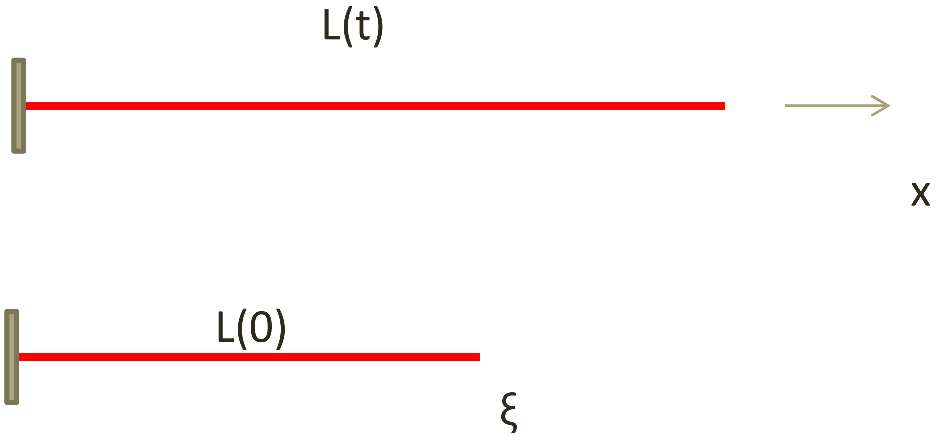
$$\underline{u}_{n+1} = (I - A * dt)^{-1}\underline{u}_n$$

Regra do Trapézio
(ponto médio)

$$\underline{u}_{n+1} = (I - \frac{1}{2}A * dt)^{-1}(I + \frac{1}{2}A * dt)\underline{u}_n$$

Voltando à formulação ALE

$$\frac{\partial}{\partial t} J_t \mathbf{U} + J_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{F} - u_o \mathbf{U} \right) = 0$$



$$x(t) = \frac{L(t)}{L(0)} \xi$$

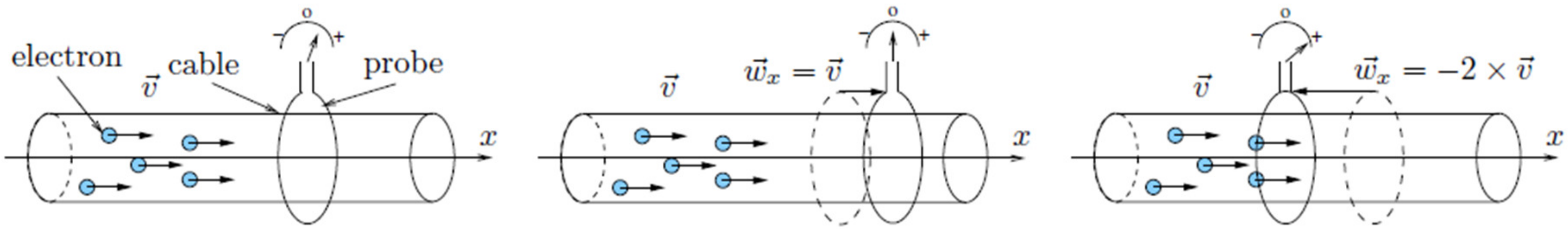
Para esta escolha a transformação depende do movimento e, portanto, não é conhecida

$$J_t = \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

No caso do pistão :

$$J_t = q(t)$$

Formulação ALE



(a) Eulerian (fixed probe) (b) Lagrangian (c) ALE

Emmanuel Lefraçois and Jean-Paul Bofflet. An introduction to Fluid-Structure Interaction: Application to the Piston Problem. SIAM Review, 52 – 4, 2010.

Para o caso isentrópico a pressão é unicamente função da densidade. Então o sistema se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(q\rho) + q\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(u - \dot{q})\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(q\rho u) + q\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u(u - \dot{q}) + p\right) = 0$$

Observações acerca da formulação ALE

- O mapeamento J define o domínio correspondente ao escoamento em cada instante. Ele depende do movimento do sólido o que, portanto, enseja um acoplamento entre os dois sistemas.
- O problema a ser resolvido é não-linear e envolve ambos os sistemas. Pode ser resolvido tanto no domínio atualizado, como no de referência.
- Na formulação ALE, tipicamente, o mapeamento J é utlizado para transporte do gride (malha) computacional, através do transporte dos elementos que o definem (nós, por exemplo).
- O movimento dos nós interiores, extrapolado a partir da fronteira, não é único e várias técnicas são analisadas na literatura (em muitos casos a malha é reconstruída).

Linearização

Estado de equilíbrio :

$$u = 0 \qquad p = p_{atm} \qquad \rho = \rho_0 \qquad q = 0$$

$$\mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_0} + \tilde{\mathbf{U}} \qquad\qquad q = 0 + \tilde{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(q\rho) + q\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(u - \dot{q})\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(q\rho u) + q\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u(u - \dot{q}) + p\right) = 0$$