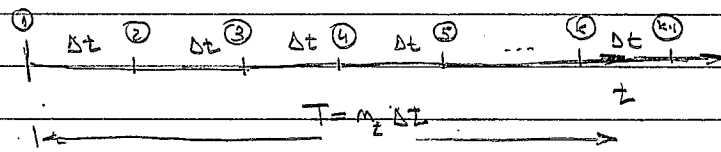


8) Métodos Diretos para Integração no Domínio do Tempo

8.1) Considerações Iniciais

$\{P.P.V\} \xrightarrow{M.E.P} \text{Pb. Semi-Discreto} = \text{Sistema de Equações Ordinárias}$

• Integração Direta \rightarrow extensão natural para problemas não-lineares



De uma forma geral: (métodos multi-passos)

$$U_{k+1} = [u_{k+1}, \dot{u}_{k+1}]$$

$$U_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j U_{k+1-j} - \Delta t \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j \dot{U}_{k+1-j} \quad (1)$$

• $\beta_0 \neq 0 \rightarrow$ métodos implícitos

• $\alpha_j = \beta_j = 0 \quad \forall j > 1 \rightarrow$ métodos de um passo

• CASO DE 1-GRAU DE LIBERDADE:

$$\begin{cases} \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \\ q(0) = 1 \\ \dot{q}(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow q(t) = \cos \omega_0 t \quad (\text{"solução exata"})$$

reescrivendo a equação acima na forma de um sistema de equações de 1ª ordem ($U^2 = \dot{q}$)

$$U = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

$$\dot{U} = AU \quad \text{onde } U = [q \ \dot{q}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

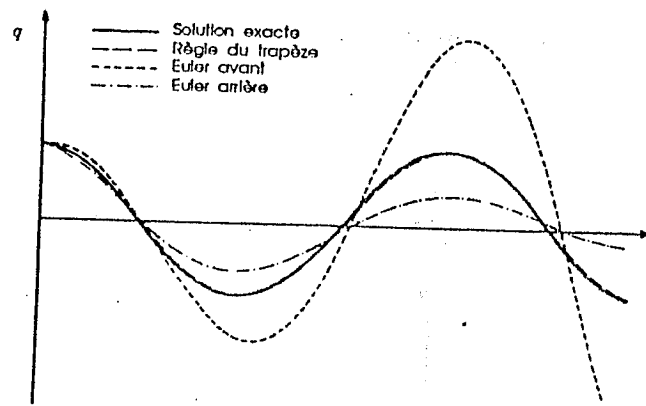
com condição inicial: $U(0) = [0 \ 1]$

• Aplicando 3 métodos mais utilizados

(i) Regra do Trapézio: $U_{k+1} = U_k + \frac{\Delta t}{2} (\dot{U}_k + \dot{U}_{k+1})$

(ii) Euler Implícito: $U_{k+1} = U_k + \Delta t \dot{U}_{k+1}$

(iii) Euler Explícito: $U_{k+1} = U_k + \Delta t \dot{U}_k$



$$\Delta t = \frac{T}{32} \quad \left(\text{período } T = \frac{1}{\omega_0} \right)$$

Obs: Euler Implícito:

$$U_{k+1} = U_k + \Delta t A U_{k+1}$$

$$\left\{ U_{k+1} = (I - \Delta t A)^{-1} U_k \right\} \quad \text{sol. sist. de equações}$$

• Estabilidade dos Métodos

Substituindo (1) \rightarrow (2)

$$\sum_{j=0}^{k+1} [\alpha_j I - \Delta t \beta_j A] U_{k+1-j} = 0 \quad (3)$$

$$(x_0 = -1)$$

Sejam μ_n os autovalores de A (problema original) e X a matriz de autovetores (vetores colunas), podemos então definir

$$U_{k+1, m} = X \mu$$

Procuramos uma solução do tipo

$$\left. \begin{array}{l} U_{(k+1-m)+1} = \lambda U_{k+1-m} = \lambda X \mu \\ \vdots \\ U_{k+1} = \lambda U_k = \dots = \lambda^{k+1} X \mu \end{array} \right\}$$

λ ---- fator de amplificação

que substituído em (3)

$$\sum_{j=0}^{k+1} [\alpha_j I - \Delta t \beta_j A] \lambda^{k+1-j} X \mu = 0$$

resultando em:

$$\sum_{j=0}^{k+1} [\alpha_j a - \Delta t \beta_j \text{diag}(\mu_n) a] \lambda^{k+1-j} = 0$$

lembrando que $X^T X = I$ e $X^T A X = \text{diag}(\mu_n)$

$$\text{logo } \sum_{j=0}^{k+1} [\alpha_j - \Delta t \beta_j \mu_n] \lambda^{k+1-j} = 0 \quad n=1, 2, \dots (4)$$

uma vez que $a \neq 0$ (há pelo menos $a_n \neq 0 \quad n=1, \dots, n$)

OBS: A forma da solução procurada implica que $|\lambda| \leq 1$ não há crescimento de soluções:

logo $\lambda = e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ representa a linha limite de estabilidade

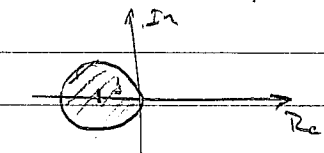
$$\text{Logo: } M_{k+1} = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j \lambda^{k+1-j}}{\sum_{j=0}^{k+1} \beta_j \lambda^{k+1-j}} \quad n=1, 2, \dots$$

C. ESTABILIDADE $\rightarrow \mu \Delta t = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j e^{i(k+1-j)\theta}}{\sum_{j=0}^{k+1} \beta_j e^{i(k+1-j)\theta}} \quad (\mu \dots \text{maior autovalor})$

Para métodos de passo único: ($\alpha_j; \beta_j = 0 \quad j > 1$)

(i) Euler Explícito: $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 0, \beta_1 = -1$

$$M \Delta t = \frac{-e^{i(k+1)\theta} + e^{ik\theta}}{-e^{ik\theta}} = \frac{e^{i\theta} - 1}{-1} = 1 - e^{i\theta}$$



$$\mu = a + bi \quad \text{mas} \quad \Delta t \in \mathbb{R}_+$$

Então: estabilidade depende do passo (estabilidade condicional)

Obs: Se $\mu \in \mathbb{R}$ poderíamos então reescrever

$$\mu \Delta t = \lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 + \mu \Delta t$$

$$|1 + \mu \Delta t| \leq 1 \quad \rightarrow \quad -1 \leq 1 + \mu \Delta t \leq 1$$

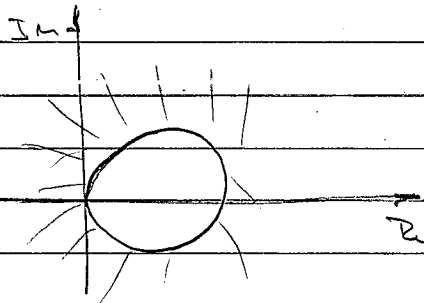
Quando: $\mu < 0 \rightarrow 1 + \mu \Delta t \leq 1 \quad \forall \Delta t$

$$\Delta t \leq \frac{2}{|\mu|}$$

(i) $\mu > 0$

(ii) Euler Implícito: $\alpha_0 = -1$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = -1$ e $\beta_1 = 0$

$$\mu \Delta t = \frac{1}{\lambda} - 1 \quad (\text{novo contrato com } \lambda)$$



Se $\mu \in \mathbb{R}$

$$\mu \Delta t = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

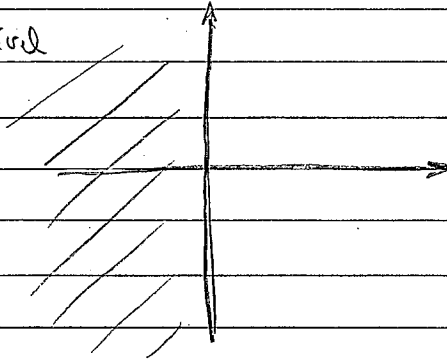
$$\lambda = \frac{1}{1 - \mu \Delta t}$$

$$\mu > 0 \quad \Delta t < \frac{1}{\mu} \quad \forall \Delta t$$

(iii) Regne de Trapezium: $\alpha_0 = -1$, $\beta_0 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_1 = 1$

$$M \Delta t = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos \theta} i$$

Estável



8.2) Método de Newmark

Fórmula de Taylor:

$$f(t_k + \Delta t) = f(t_k) + \Delta t f'(t_k) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(t_k) + \dots + \frac{\Delta t^s}{s!} f^{(s)}(t_k) + R,$$

$$R = \frac{1}{s!} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} f^{(s+1)}(\sigma) (t_k + \Delta t - \sigma)^s d\sigma$$

onde $f^{(s)} = \frac{d^s f}{dt^s}$

Temos, então

$$\dot{u}_{k+1} = \dot{u}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{u}(\sigma) d\sigma$$

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t \dot{u}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \sigma) \ddot{u}(\sigma) d\sigma$$

Tomando (mais uma vez) inspirado na fórmula de Taylor) *

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{u}(\sigma) d\sigma = (1-\gamma) \Delta t \ddot{u}_k + \gamma \Delta t \ddot{u}_{k+1} + \bar{r}_M$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \sigma) \ddot{u}(\sigma) d\sigma = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_k + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{k+1} + \bar{r}_M$$

Aproximações numéricas para integrais, onde

T. VALOR MÉDIO $\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}_M = (\gamma - 0.5) \Delta t^2 \mu^{(3)}(\tilde{\sigma}) + O(\Delta t^3 \mu^{(4)}) \end{array} \right.$

$$t_k < \tilde{\sigma} < t_{k+1}$$

MÉDIO $\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}_M = \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \Delta t^3 \mu^{(3)}(\tilde{\sigma}) + O(\Delta t^4 \mu^{(4)}) \end{array} \right.$

$$(*) \left\{ \begin{aligned} \ddot{u}_m &= \ddot{u}(\xi) + \mu^{(3)}(\xi) (t_m - \xi) + \mu^{(4)}(\xi) \cdot \frac{(t_m - \xi)^2}{2} + \dots & (*) \\ \ddot{u}_{m+1} &= \ddot{u}(\xi) + \dots & (**) \end{aligned} \right.$$

Multiplicando as equações acima por $(1-\delta)$ e δ

$$\Rightarrow \ddot{u}(\xi) = (1-\delta) \ddot{u}_m + \delta \ddot{u}_{m+1} + \mu^{(3)}(\xi) [\xi - \delta t_m - t_m] + O(\Delta t^2 \mu^{(4)})$$

Analogamente usando $(1-2\beta)$ e 2β

$$\Rightarrow \ddot{u}(\xi) = (1-2\beta) \ddot{u}_m + 2\beta \ddot{u}_{m+1} + \mu^{(3)}(\xi) [\xi - 2\delta t_m - t_m] + O(\Delta t^2 \mu^{(4)})$$

Pourtant, le méthode de Newmark consiste en résoudre les eq. ci-dessous

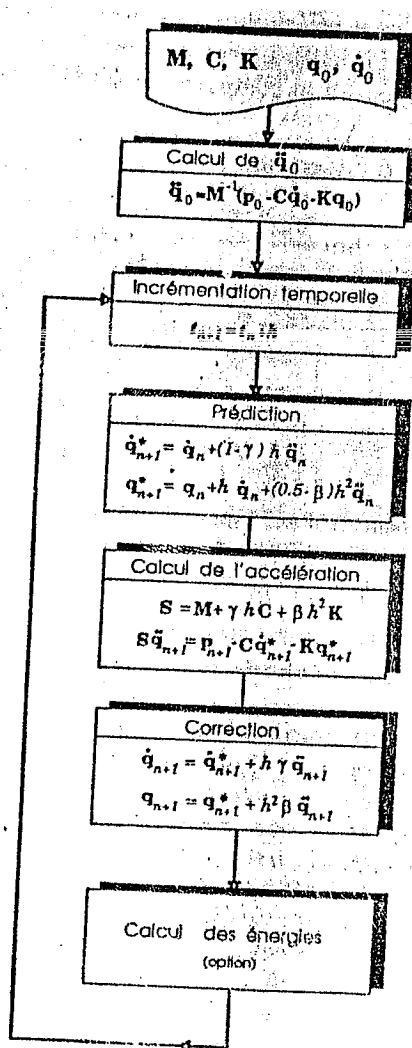
$$\dot{u}_{k+1} = \dot{u}_k + (1-\gamma) \Delta t \ddot{u}_k + \gamma \Delta t \ddot{u}_{k+1} \quad (4)$$

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t \dot{u}_k + \Delta t^2 \left(\frac{1-\beta}{2} \right) \ddot{u}_k + \Delta t^2 \beta \ddot{u}_{k+1}$$

e, ainda

$$M \ddot{u}_{k+1} + C \dot{u}_{k+1} + K u_{k+1} = F(t_{k+1}) \quad (5)$$

(eq. de movimento no instante t_{k+1})



CONVERGÊNCIA = ESTABILIDADE + CONSISTÊNCIA

• Consistência

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \dot{u}(t_k)$$

1º método de Newmark:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(1-\gamma)\ddot{u}_k + \gamma\ddot{u}_{k+1}}{\ddot{u}_k + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t\ddot{u}_k + \beta\Delta t\ddot{u}_{k+1}} = \frac{\ddot{u}_k}{\ddot{u}_k}$$

• Estabilidade

$$M \ddot{u}_{k+1} = -C \dot{u}_k - K u_k + F_k$$

$$M \ddot{u}_{k+1} = -C \dot{u}_{k+1} - K u_{k+1} + F_{k+1}$$

onde $F_k = F(t_k)$

Pre-multiplicando (4) por M e levando em conta as relações acima temos

$$U_{k+1} = A(\Delta t) U_k + g(\Delta t)$$

onde

$$A(h) = H_1^{-1}(h) H_0(h)$$

$$g_{n+1} = H_1^{-1}(h) b_{n+1}(h) F_{n+1}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} M + \gamma h C & \gamma h K \\ \beta h^2 C & M + \beta h^2 K \end{bmatrix}$$

$$H_0 = - \begin{bmatrix} (1-\gamma)hC - M & (1-\gamma)hK \\ \left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2C - hM & \left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2K - M \end{bmatrix}$$

$$b_{n+1} = \begin{bmatrix} (1-\gamma)h p_n + \gamma h p_{n+1} \\ \left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2 p_n + \beta h^2 p_{n+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{n+1} \\ F_{n+1} \end{matrix}$$

Seja, então:

$$U_0'' = U_0 + \delta U_0 \quad \delta U_0 \rightsquigarrow \text{perturbação}$$

$$\text{Para sol. n. perturbada: } U_{k+1} = A^{k+1} U_0 + \sum_{j=0}^{k+1} A^{k-j+1} g_j$$

$$\text{Para solução perturbada } U_{k+1}' = A^{k+1} U_0' + \sum_{j=0}^{k+1} A^{k-j+1} g_j$$

Logo, no instante t_{k+1} a diferença entre as duas soluções é dada por:

$$\Delta U_{k+1} = U_{k+1}' - U_{k+1} = A^{k+1} (U_0' - U_0) = A^{k+1} \delta U_0$$

Considerando a_s e x_s , respectivamente, os autovalores e autovetores de A :

$$\Delta U_{k+1} = \sum_{s=1}^{2N} a_s \lambda_s^{k+1} x_s$$

Onde a_s são coeficientes dados por:

$$\delta U_0 = \sum_{s=1}^{2N} a_s x_s$$

Logo se os autovalores de A forem ^{em módulo} maiores que 1 a perturbação inicial se amplificará!

Vamos a analisar o caso sem amortecimento

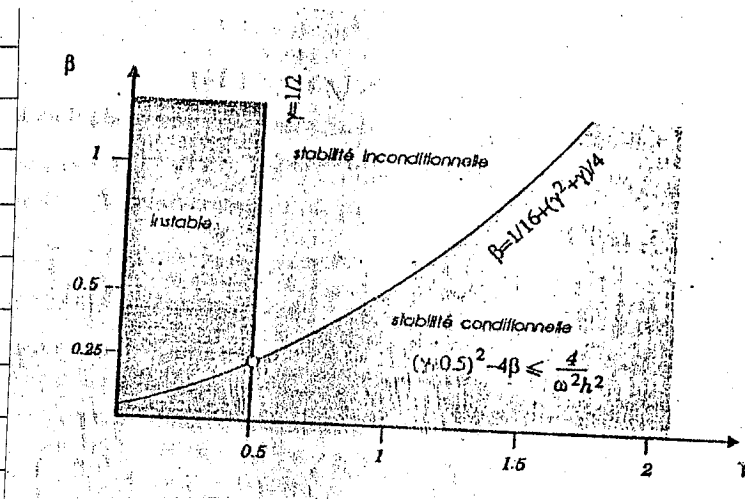
$$\ddot{q} + \omega^2 q = F_H \quad (\text{modo } n)$$

Os autovalores de A serão dados por:

$$\lambda^2 - \lambda \left[2 - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right] + 1 - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2 = 0$$

$$g^2 = \frac{\omega^2 \Delta t^2}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2}$$

Obs.: acima está se observando o que acontece no referido modo M.



• Erro na amplitude e no período

Tomando novamente a equação protótipo

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0 \quad \eta(0) = \eta_0 \quad \dot{\eta}(0) = 0$$

Sol. exata: $\eta = g \cos \omega t$

• Erro na amplitude

$$\rho - 1 = -\frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \omega^2 \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

• Erro no período

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{12} \right) \omega^2 \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

Algorithme	γ	β	Limite de stabilité $\omega \Delta t$	Erreur d'amplification $\rho - 1$	Erreur de périodicité $\frac{\Delta T}{T}$
Purement explicite	0	0	0	$\frac{\omega^2 h^2}{4}$	—
Différence centrée	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$\frac{-\omega^2 h^2}{24}$
Fox & Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	2.45	0	$O(h^3)$
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	3.46	0	$\frac{\omega^2 h^2}{24}$
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞	0	$\frac{\omega^2 h^2}{12}$
Accélération moyenne schéma modifié	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1+\alpha)^2}{4}$	∞	$-\alpha \frac{\omega^2 h^2}{2}$	$\frac{\omega^2 h^2}{12}$

8.2) ○ Método misto (Newman-Hughes-Taylor)

• Introdução de dissipação numérica p/ altas frequências

Notação $f(u, i) = K u + C i$

→ Método : - relações de evolução de Newman

$$M \ddot{u}_{k+1} + (1-\alpha) f(u_{k+1}, i_{k+1}) + \alpha f(u_k, i_{k+1}) = (1-\alpha) g(u_{k+1}, t) + \alpha g(u_k, t)$$

• Comparação Newman x HHT

- Raio espectral $\mathcal{R}(A) = \max_i (|h_i|)$

- Erro no período $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega \Delta t}{\omega} - 1$ $\psi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im } h_i}{\text{Re } h_i} \right)$

- Amortecimento Numérico : $\rho = -\log(|\lambda_i|)$

4

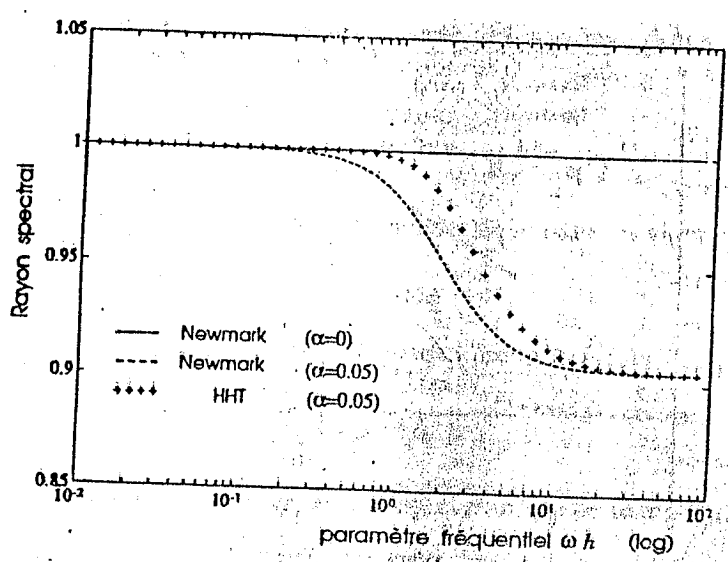


figure 7.3.3
Rayon spectral
des méthodes HHT et Newmark

