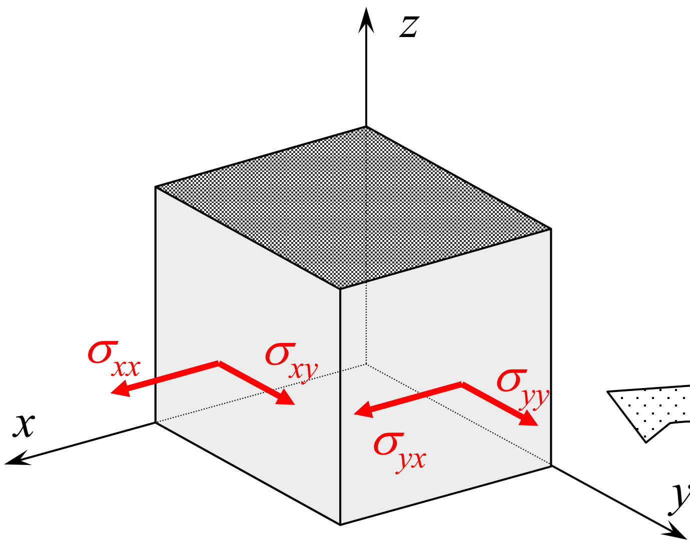
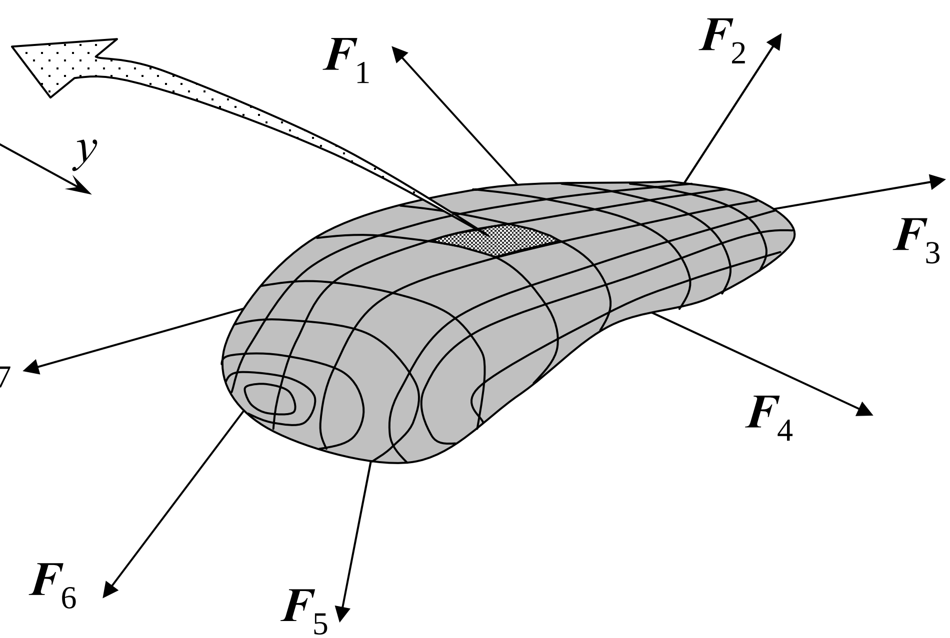
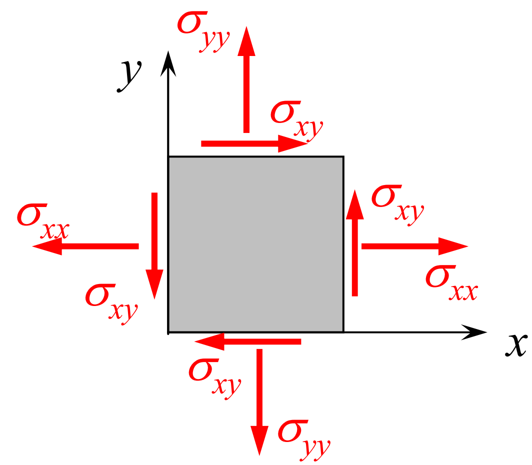
Estado Plano de Tensão

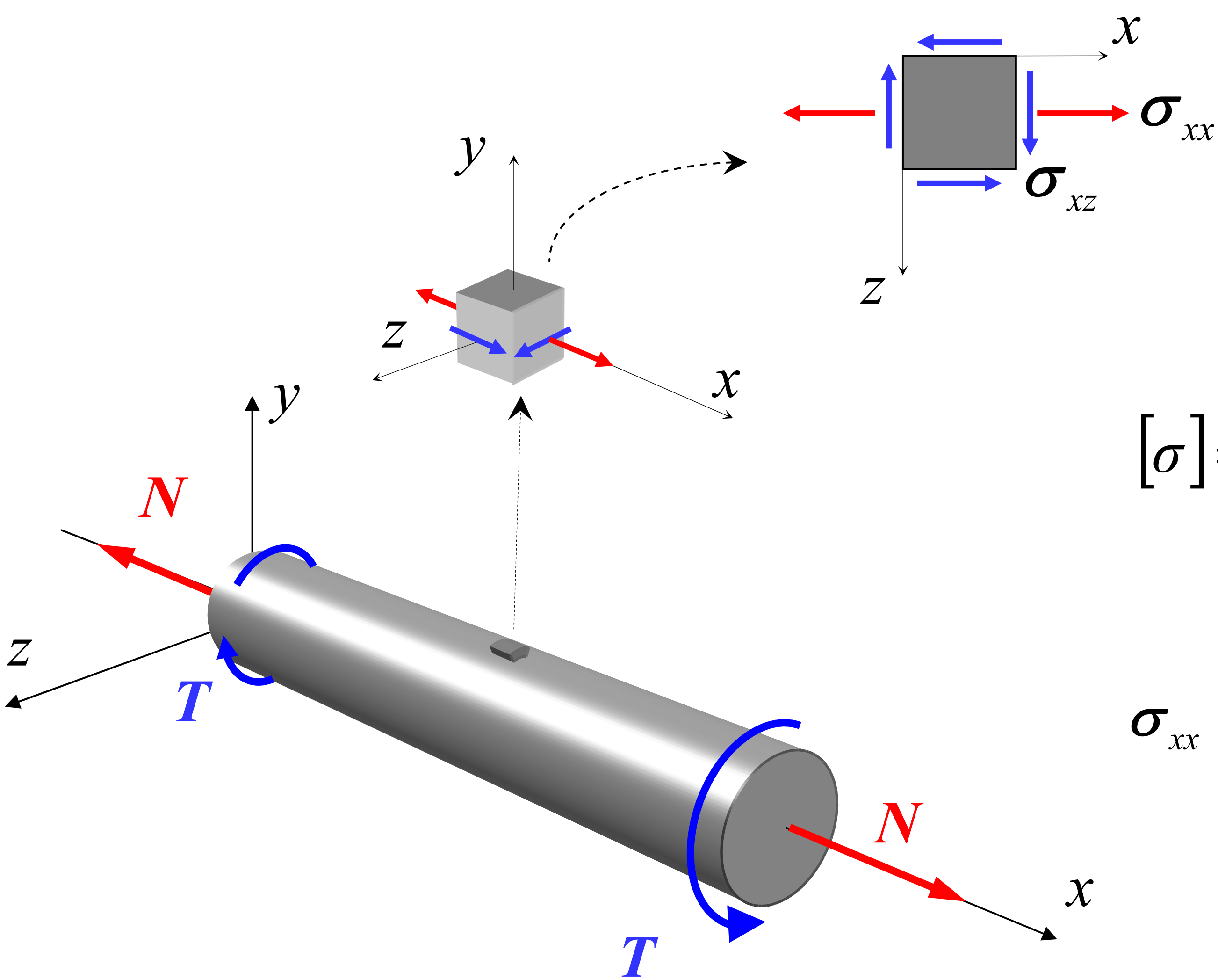
$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_{xx} & \boldsymbol{\sigma}_{xy} & 0\\ \boldsymbol{\sigma}_{xy} & \boldsymbol{\sigma}_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$







Estado Plano de Tensão: *Força Axial e Torção*

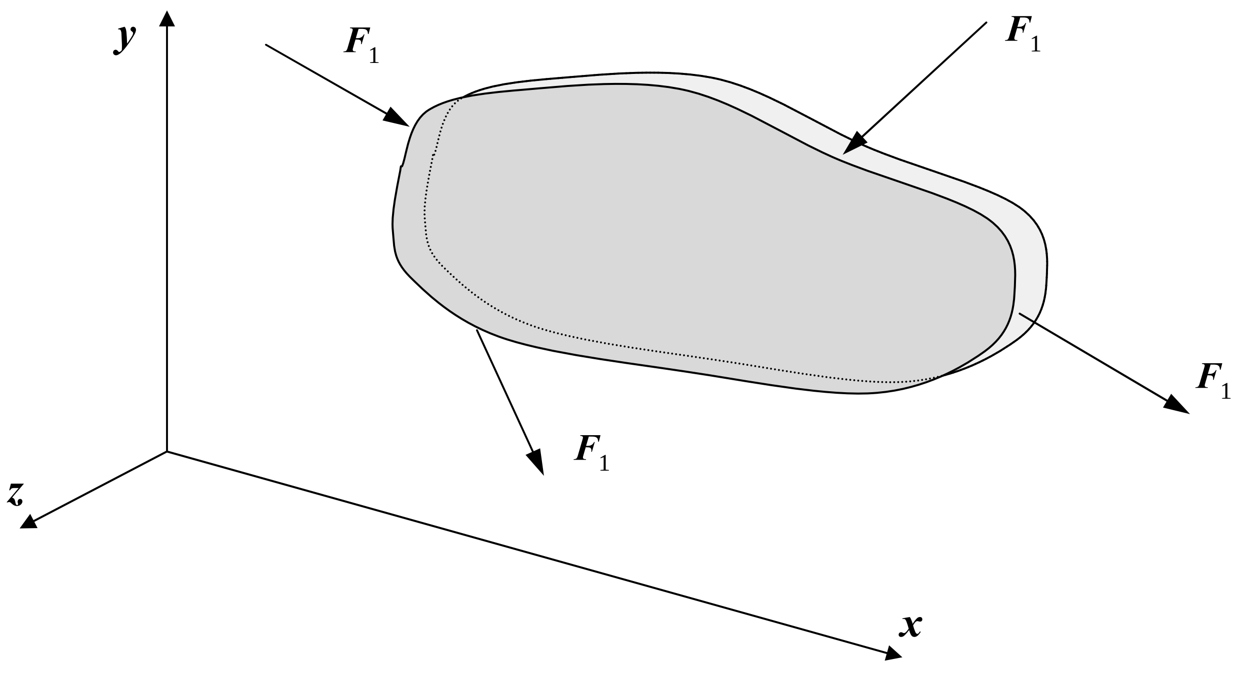


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \sigma_{xz} = \frac{TD}{2J}$$

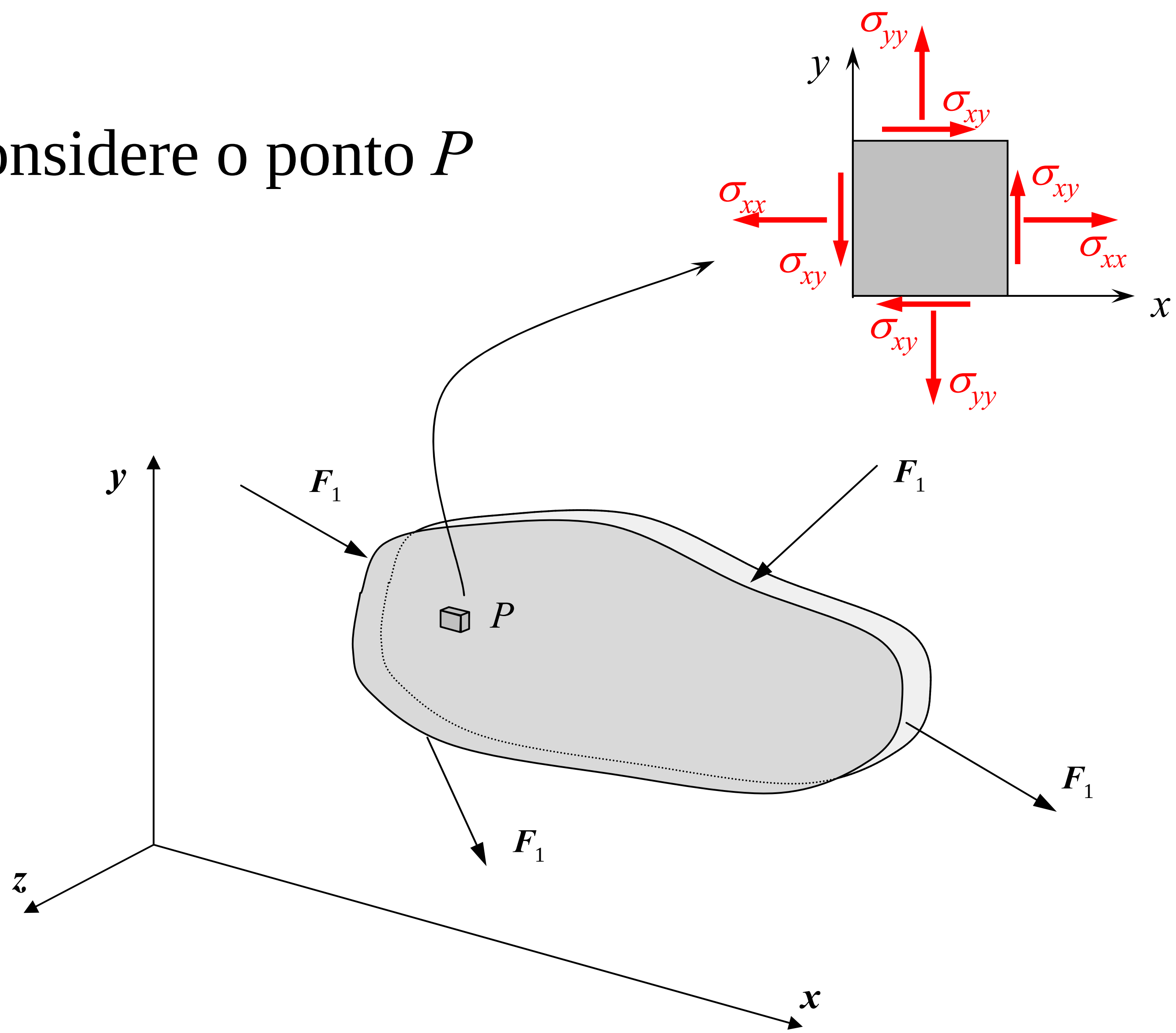
Estado Plano de Tensão

Conhecidas as componentes do tensor de tensões num ponto onde o estado de tensão é plano, determinar o *vetor tensão* em planos arbitrários



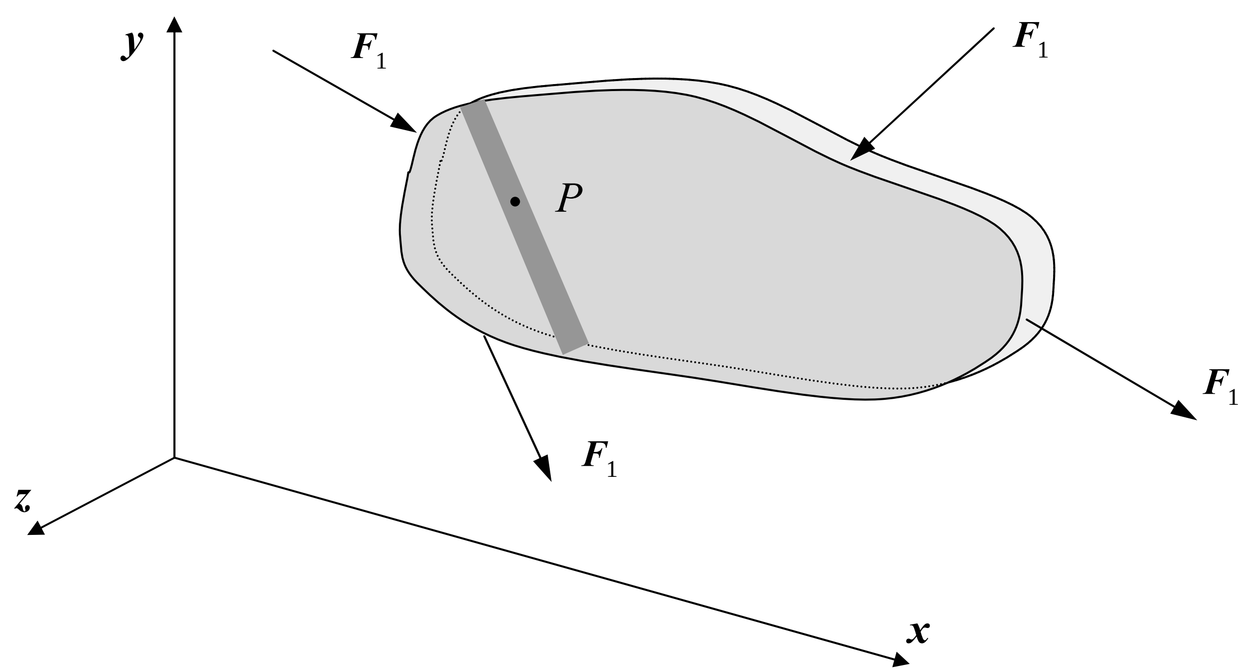
Estado Plano de Tensão

Considere o ponto *P*



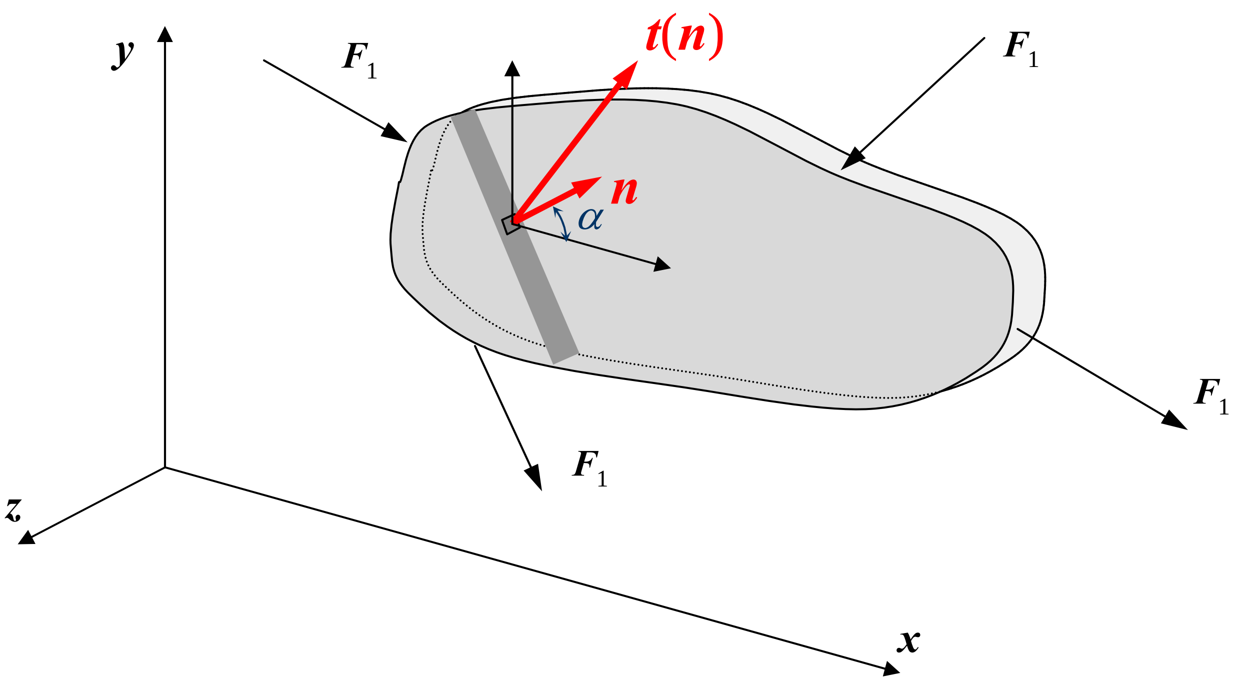
Estado Plano de Tensão

Considere um plano passando pelo ponto *P*

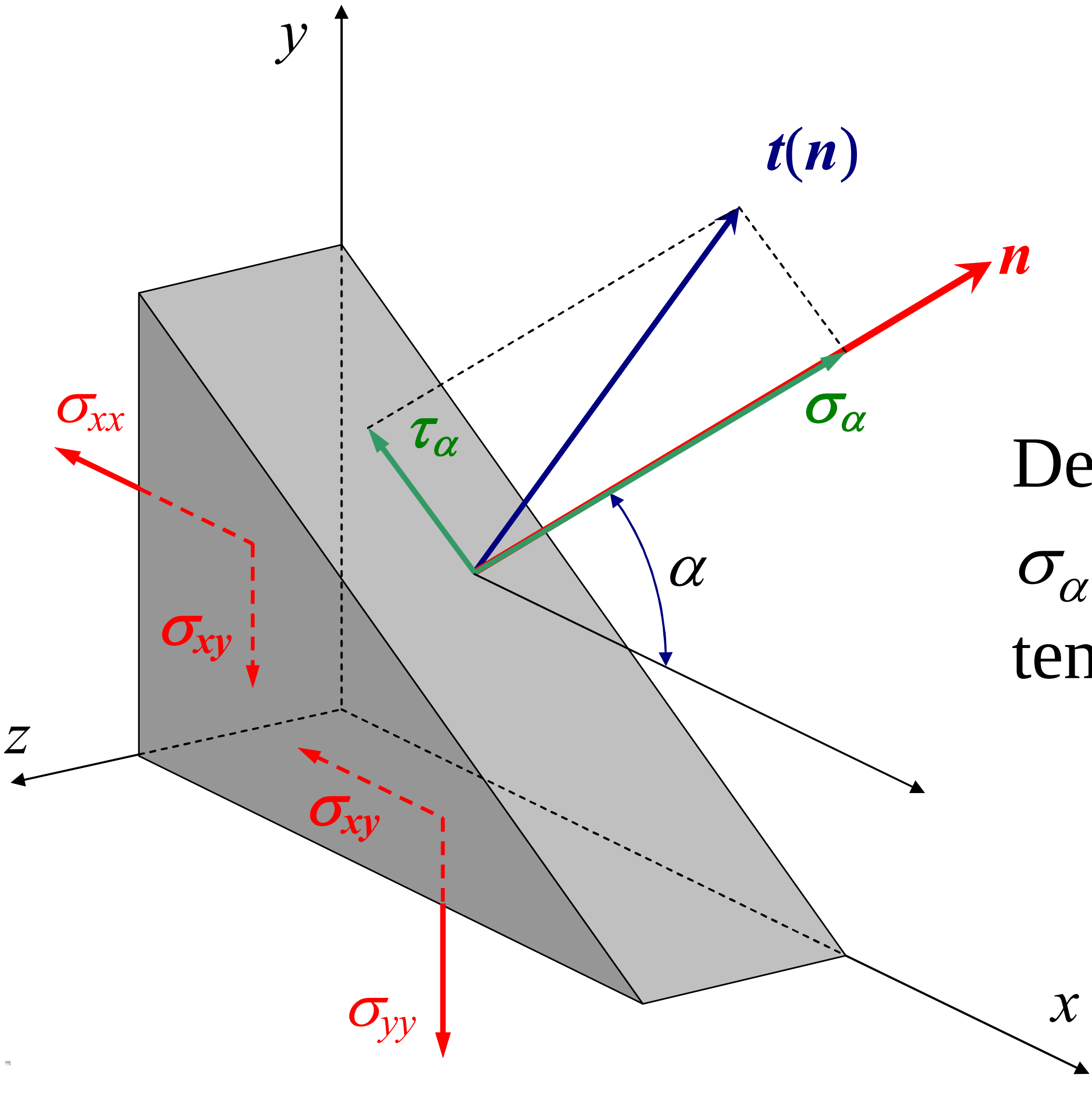


Estado Plano de Tensão

O plano é determinado pela normal $\boldsymbol{n}$ que faz um ângulo α com o eixo x



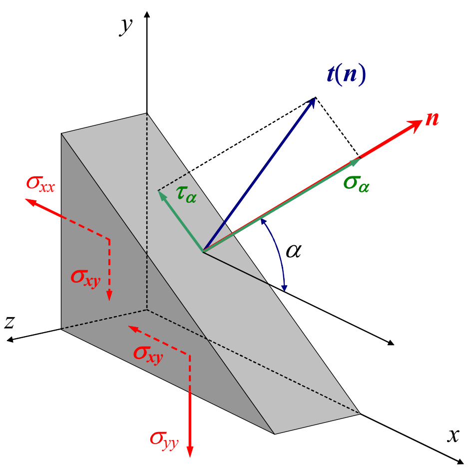
Estado Plano de Tensão



Deseja-se determinar σ_α e τ_α em função das tensões σ_{xx}, σ_{xy} e σ_{yy}

Estado Plano de Tensão

Impondo-se o equilíbrio de forças nas duas direções obtém-se:



$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha$$

Estado Plano de Tensão

O mesmo resultado é obtido considerando-se

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{t(\alpha)\} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}\cos\alpha + \sigma_{xy}\sin\alpha \\ \sigma_{xy}\cos\alpha + \sigma_{yy}\sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_\alpha = \{t(\alpha)\}^T \{n\}$$

$$\tau_\alpha = \left\| \{t(\alpha)\} - \sigma_\alpha \{n\} \right\|$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

Problema: Determinar as direções dos planos, determinados pelos ângulos α, onde ocorrem os valores máximo e mínimo de σ_α

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\alpha + 2\sigma_{xy}\cos 2\alpha = 2\tau_\alpha$$

logo $$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tau_\alpha = 0$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin 2\alpha + 2\sigma_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tan 2\alpha_{I,II} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

logo

$$\alpha_I = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\right) \quad \text{e} \quad \alpha_{II} = \alpha_I + \frac{\pi}{2}$$

Estado Plano de Tensão
Tensões e direções principais

As tensões principais sao dadas pelas expressões:

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{I,II} = \sigma_{av} \pm R$$

Estado Plano de Tensão
Máxima tensão cisalhante

Problema: Determinar os planos onde ocorrem as máxima e mínima tensões cisalhantes

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = -\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos 2\alpha + 2\sigma_{xy}\sin 2\alpha$$

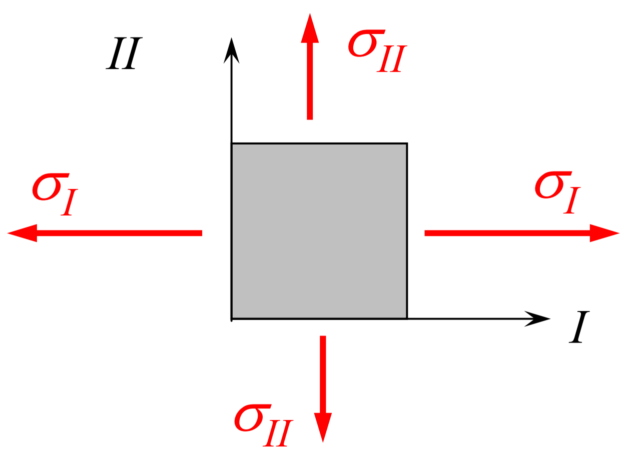
logo

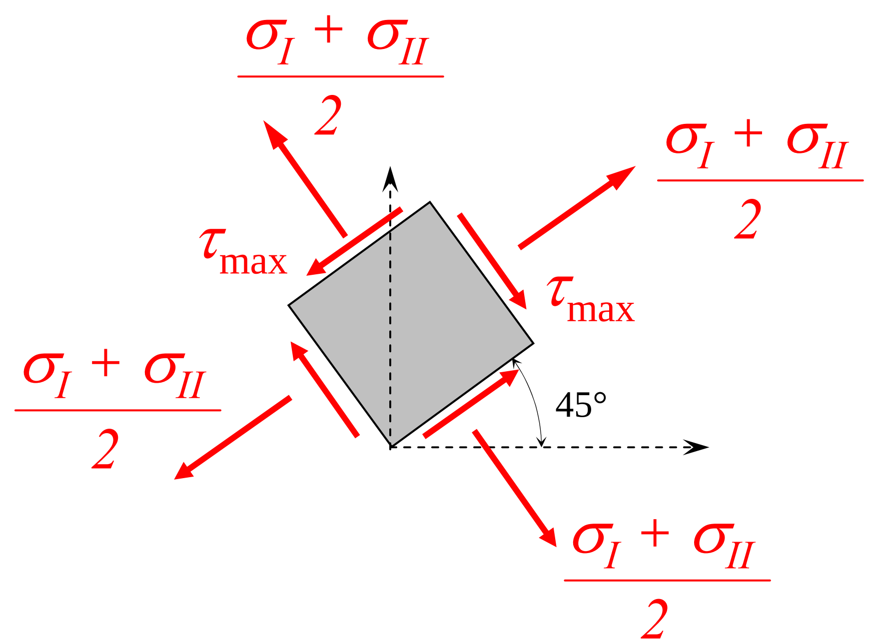
$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tan 2\bar{\alpha} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}} = \cot 2\alpha_{I,II}$$

portanto

$$\bar{\alpha} = \alpha_I + \frac{\pi}{4}$$

Estado Plano de Tensão
Máxima tensão cisalhante





$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

Estado Plano de Tensão

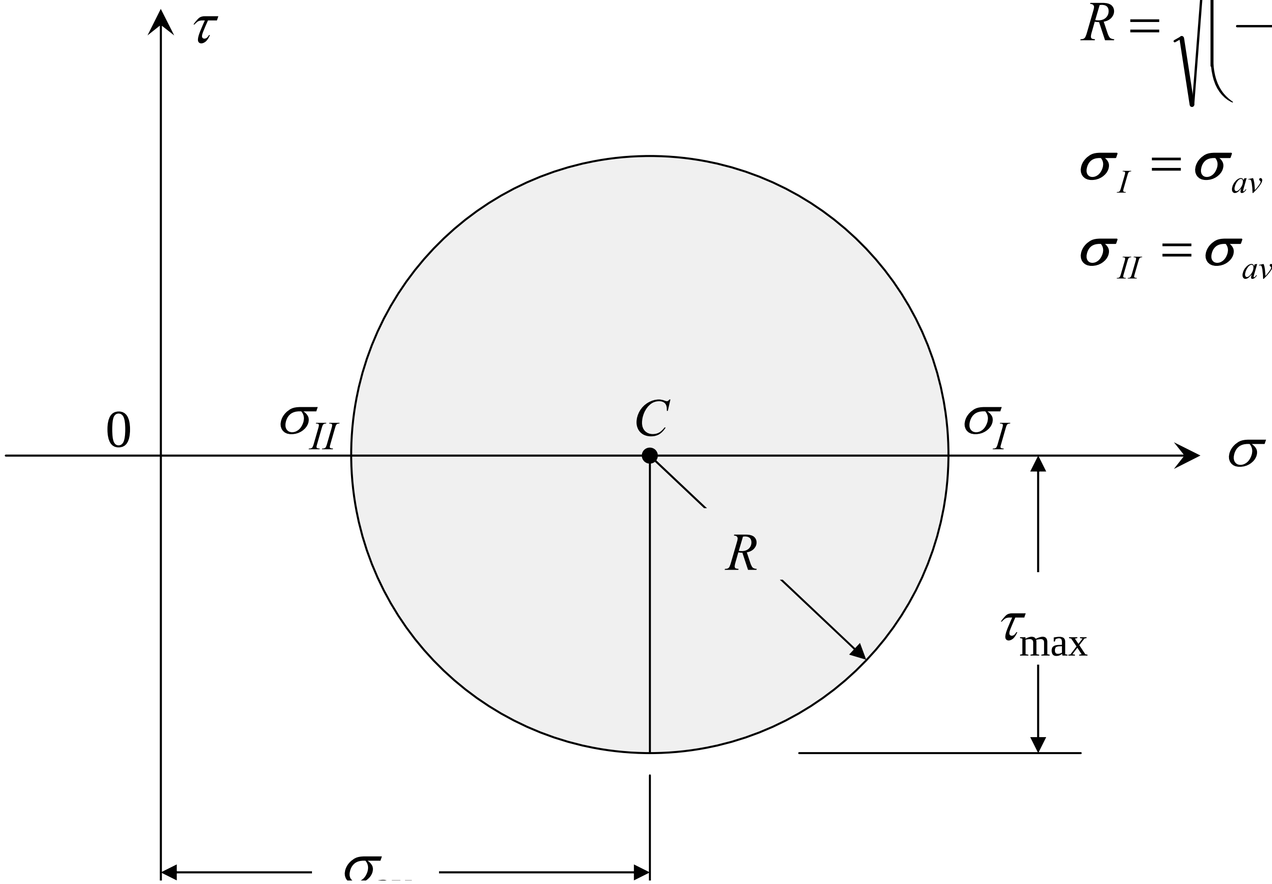
Círculo de Mohr

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

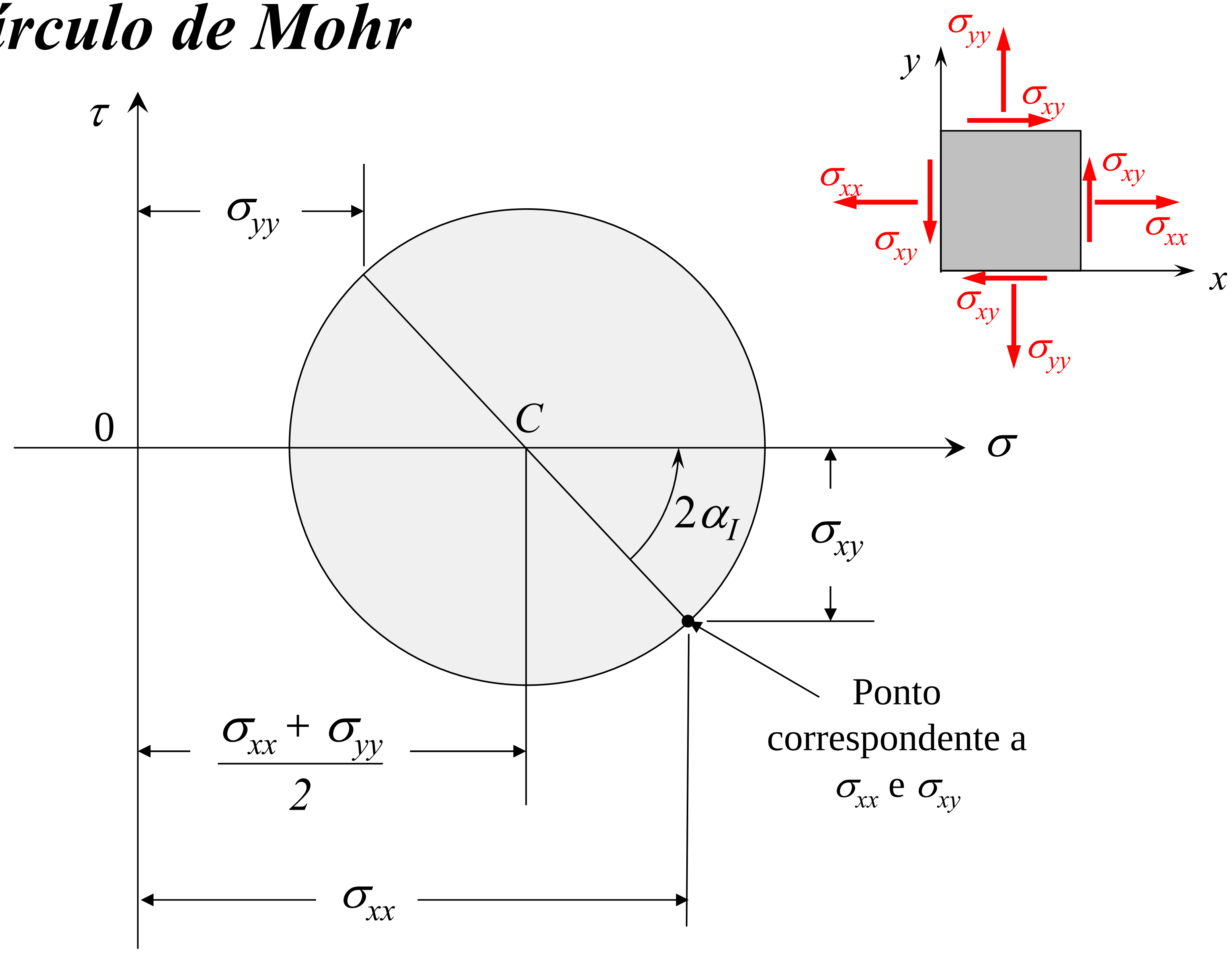
$$\sigma_I = \sigma_{av} + R$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{av} - R$$



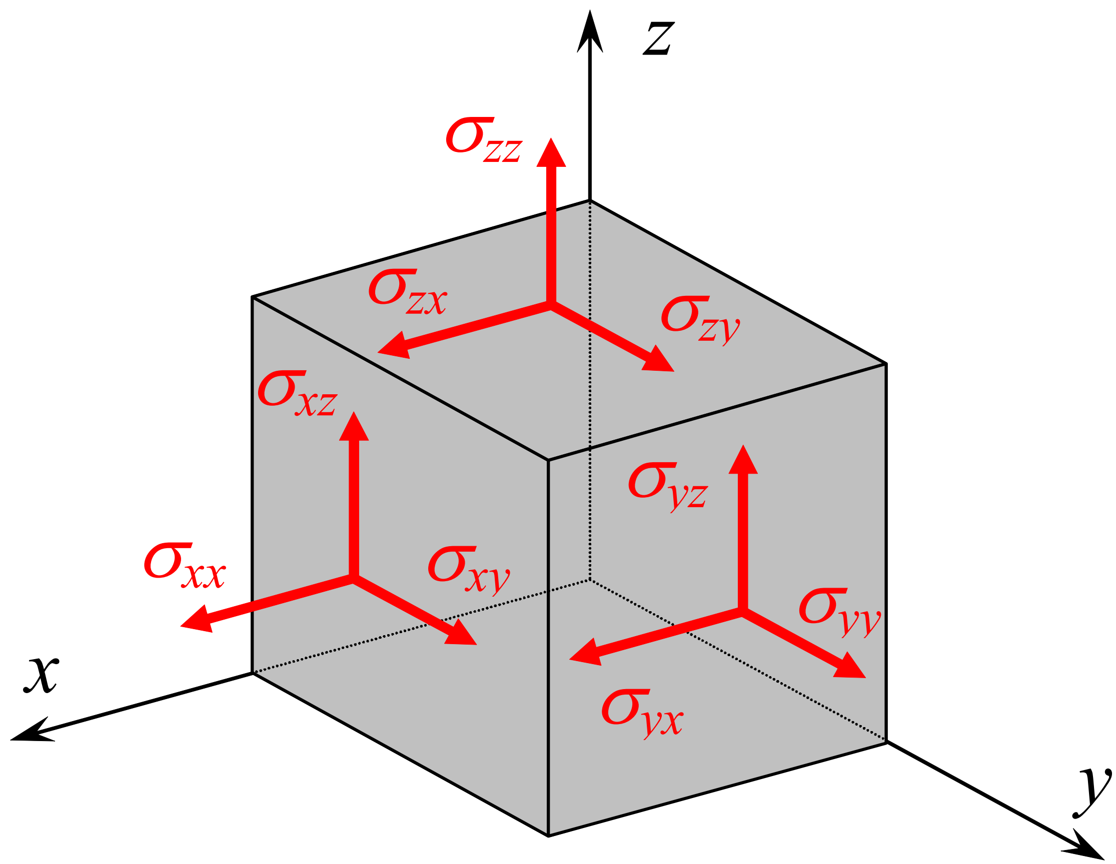
Estado Plano de Tensão

Círculo de Mohr



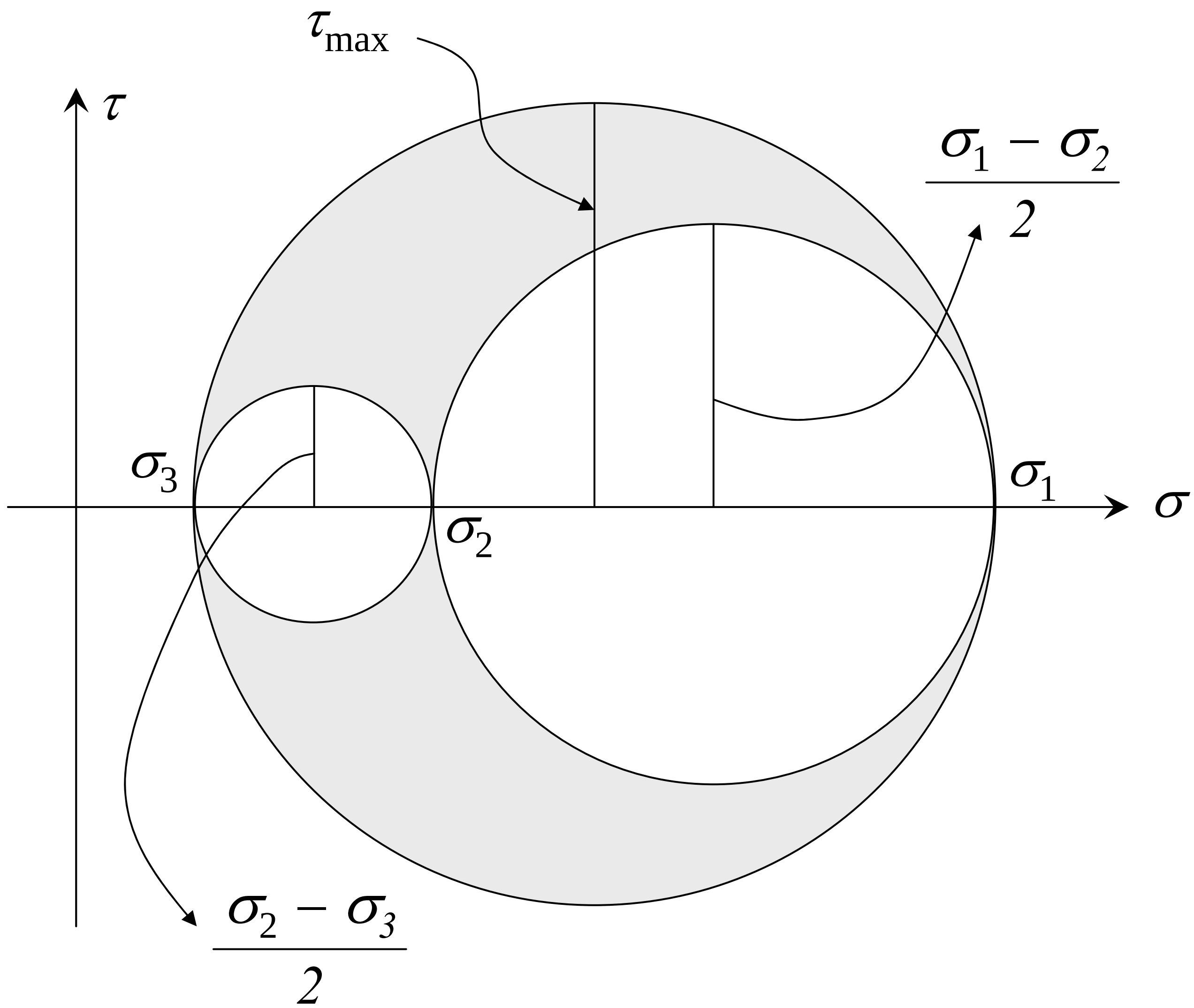
Estado Triaxial de Tensão

Círculo de Mohr



Estado Triaxial de Tensão

Círculo de Mohr



Estado Triaxial de Tensão
Círculo de Mohr