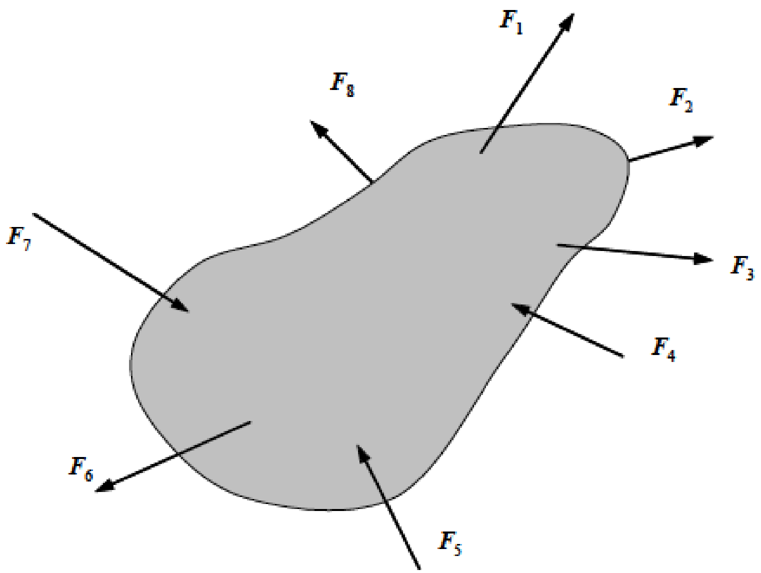
Capítulo IV – Tensões e Deformações

O “problema referencial ” da Mecânica dos Sólidos



Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Encontrar

- Esforços internos (tensões ????)
- Deformações (Como quantificar ???)
- Configuração Deformada (Campo de Deslocamentos)

O “problema referencial ” da Mecânica dos Sólidos

- Hipótese básica : “Pequenas Deformações”

- Roteiro para solução (muitas vezes teremos que lançar mão de ferramentas de simulação computacional...):

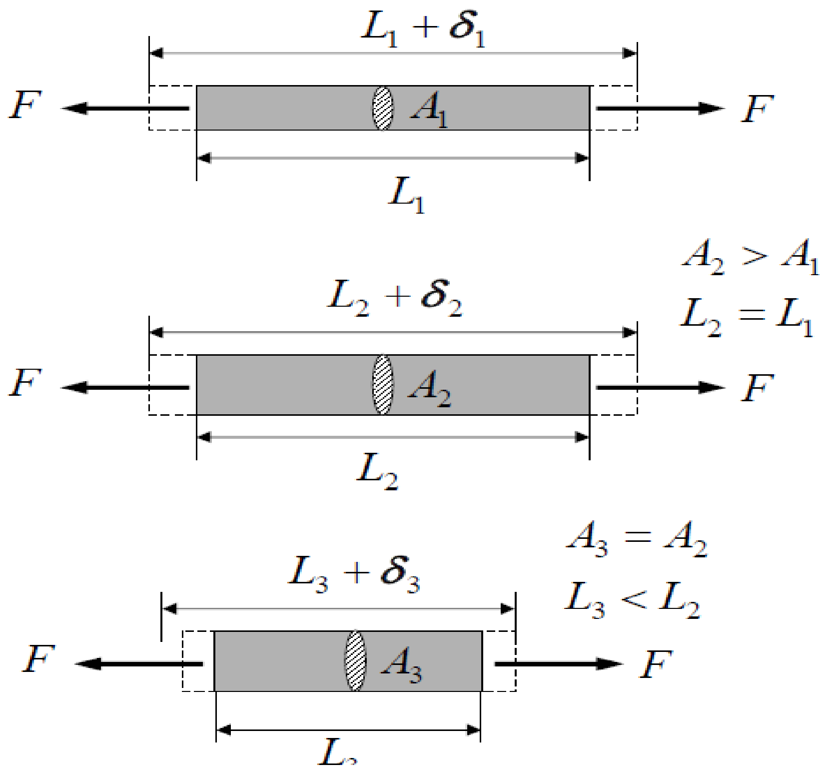
1. Geometria da Deformação (compatibilidade Geométrica)

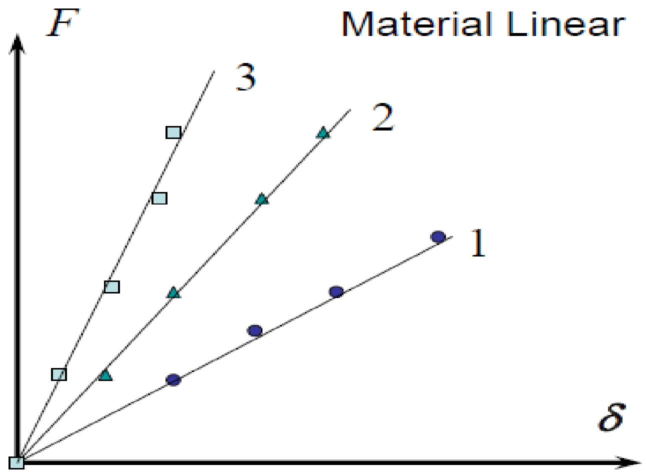
2. Equilíbrio (hipótese também)

3. Comportamento do Material (para nós – elástico e linear)

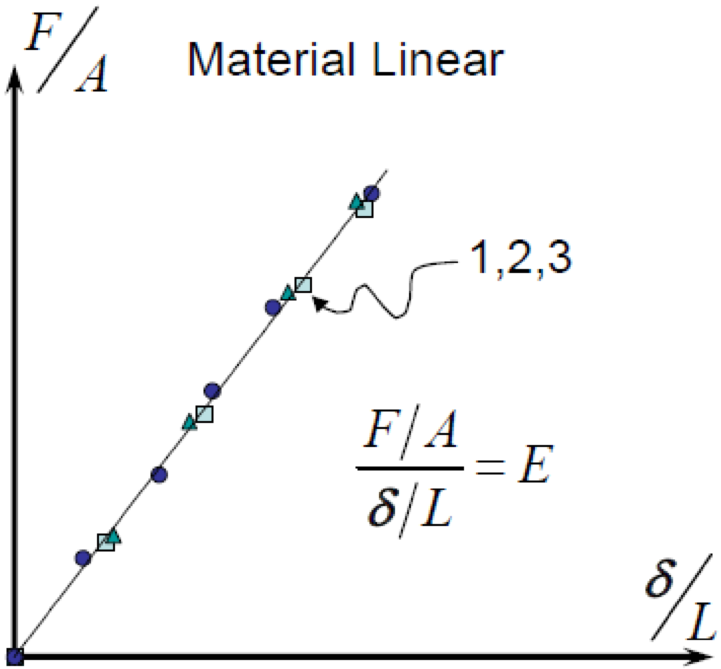
Comportamento do Material ...

Carregamentos e Deformações Uniaxiais





Tensão X Deformação (1D)



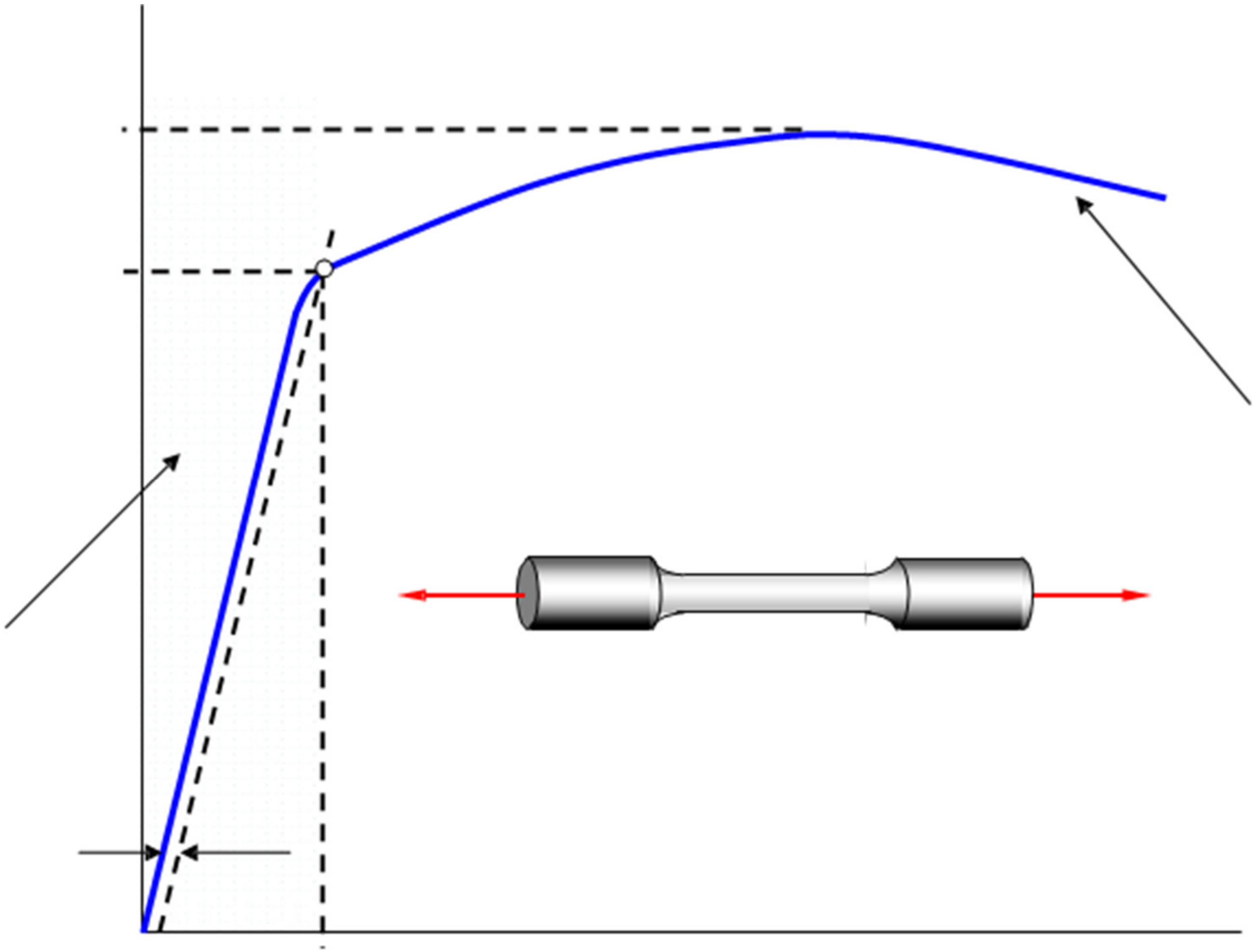
$$\frac{F/A}{\delta/L} = E$$

Módulo de Elasticidade (Módulo de Young)

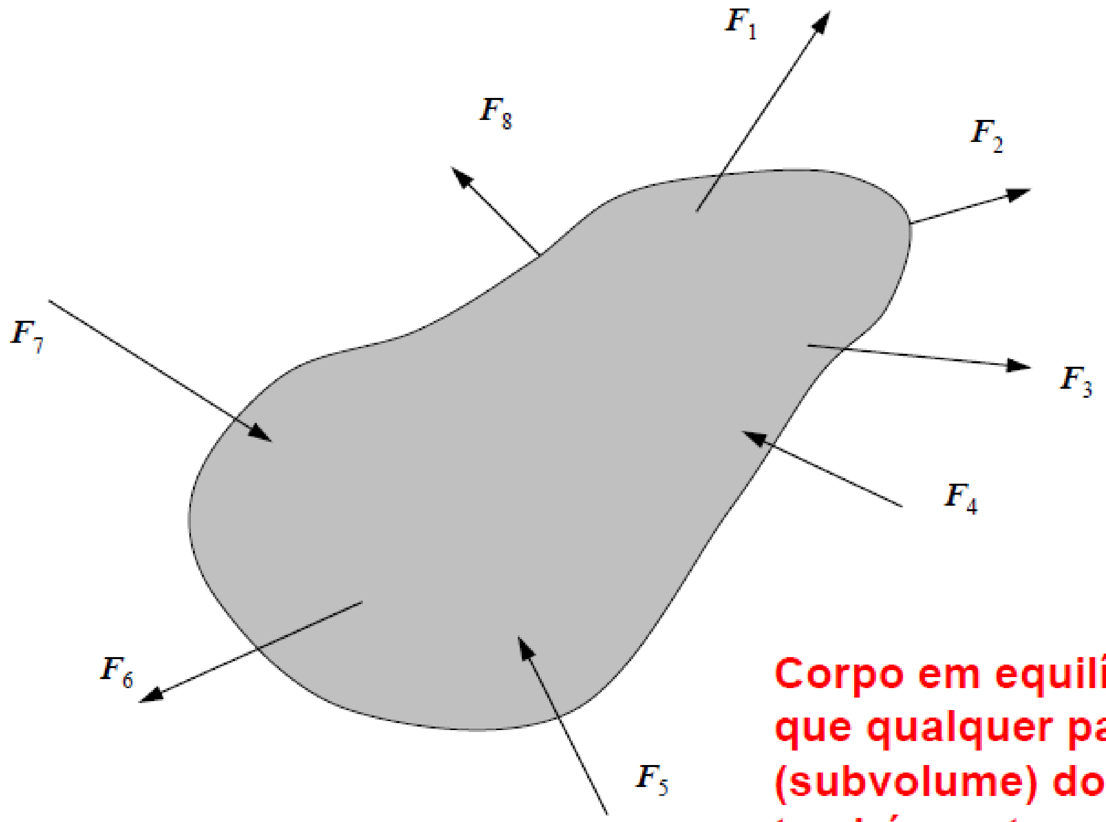
Material	*E*, Pa (N/m^2)
Aço	1.94E+11 a 2.05E+11
Alumínio	6.90E+10
Vidro	6.90E+10
Madeira	6.9E+09 a 1.38E+10
Nylon, Epóxi, etc.	2.75E+08 a 5.5E+08
Tungstênio	4.00E+11
Molibidênio	2.75E+11
Borracha	1.38E+06 a 5.5E+06
Colágeno	1.38E+06 a 1.03E+07

Crandall *et al.*, 1978

Comportamento Constitutivo

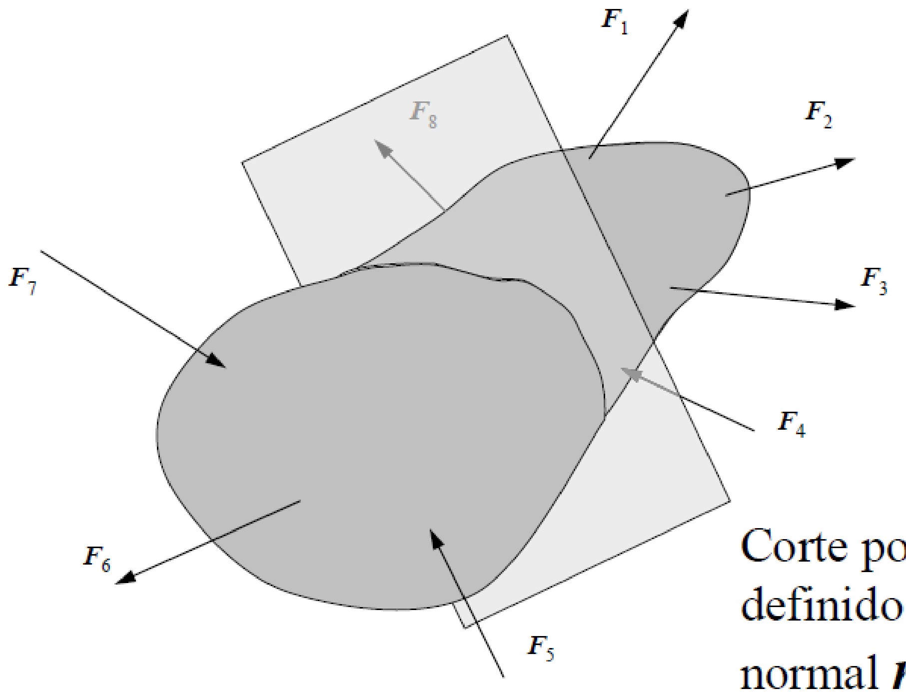


Equilíbrio



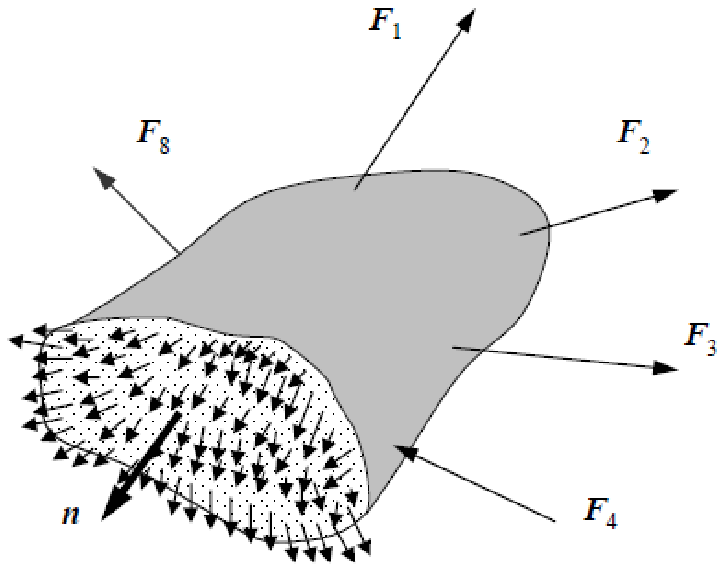
Corpo em equilíbrio significa que qualquer parte (subvolume) do corpo deve também estar em equilíbrio

Equilíbrio e Esforços Internos



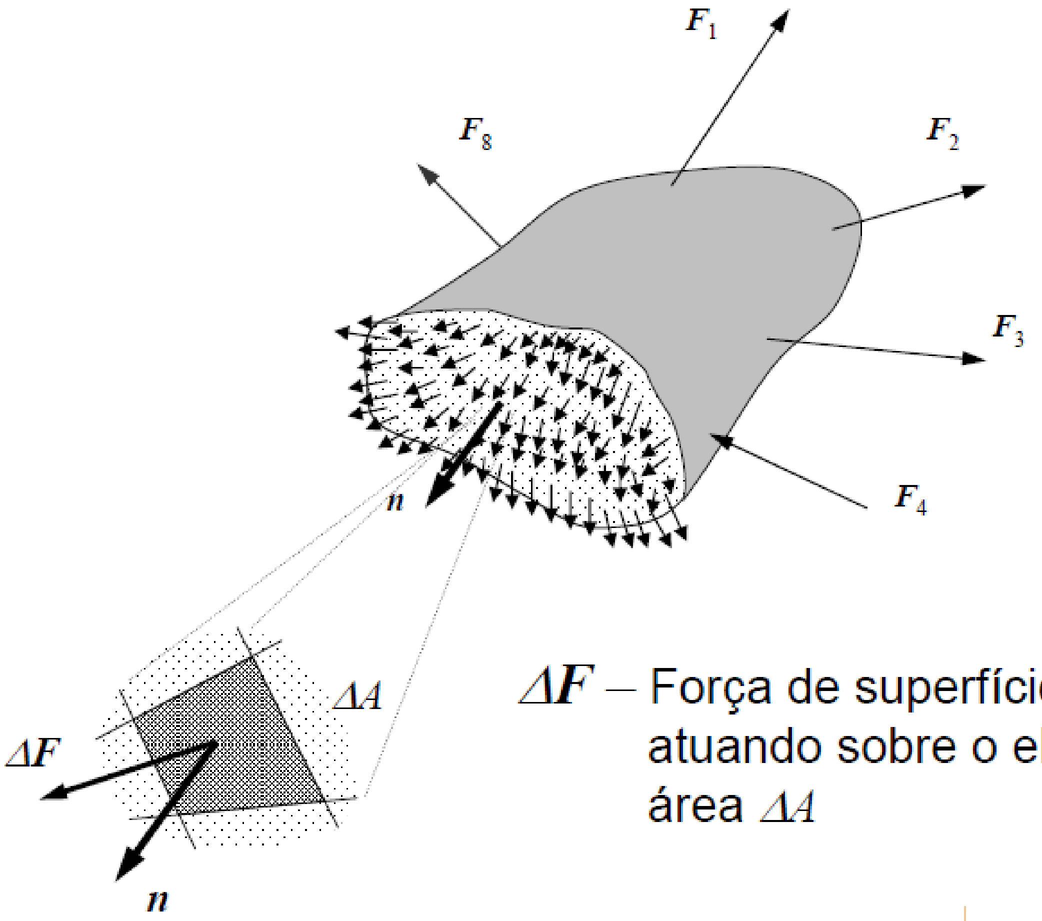
Corte por um plano definido pelo vetor normal $\boldsymbol{n}$

Esforços Internos



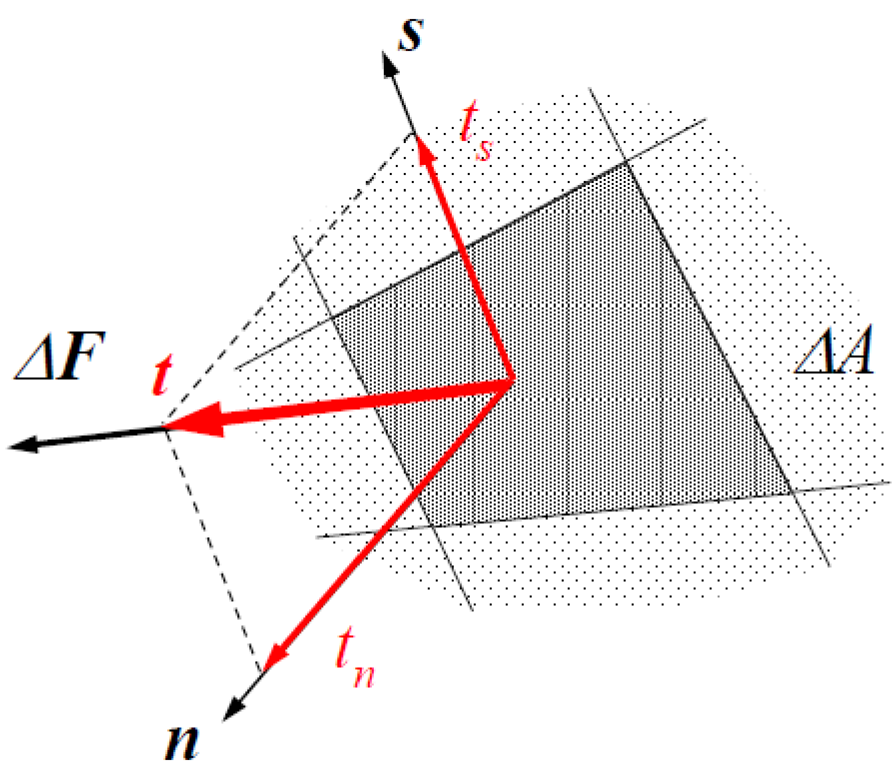
Forças internas de ligação (forças de superfície) mantêm as duas partes do corpo em equilíbrio

A natureza dos esforços internos ...



ΔF – Força de superfície resultante atuando sobre o elemento de área ΔA

O vetor tensão



Vetor tensão

$$\boldsymbol{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}$$

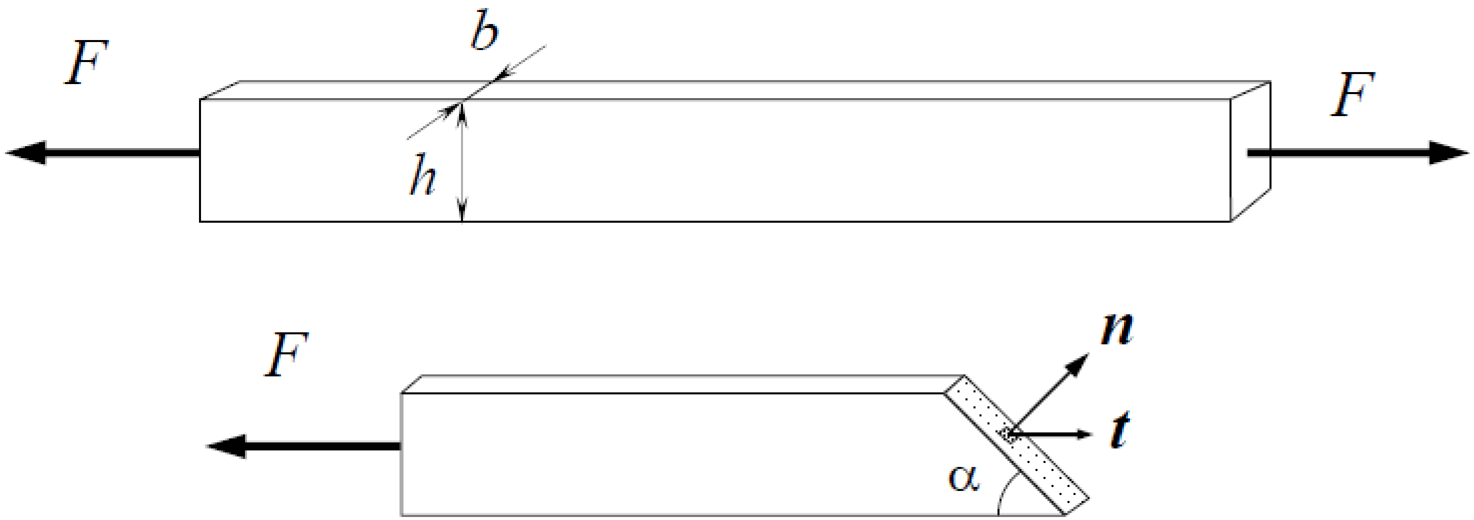
Componente normal
(tensão normal)

$$t_n = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}$$

Componente tangencial
(tensão cisalhante)

$$t_s = \left| \boldsymbol{t} - (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \right|$$

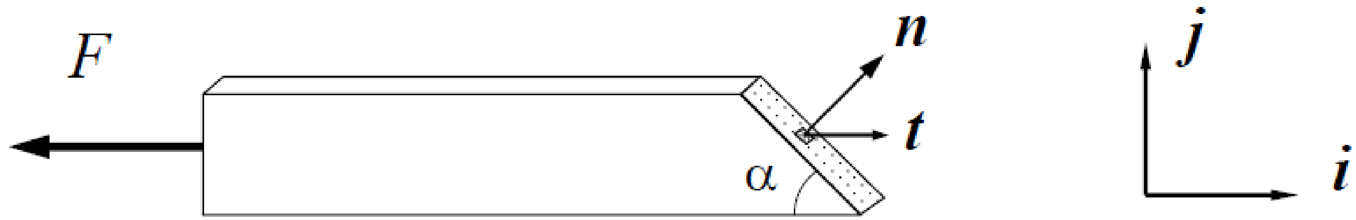
Tensão : uma grandeza tensorial



Equilíbrio é satisfeito quando:

$$\boldsymbol{F} + \int \boldsymbol{t}\, dA = 0$$

Os esforços internos (tensão) dependem da direção de observação (plano do corte)

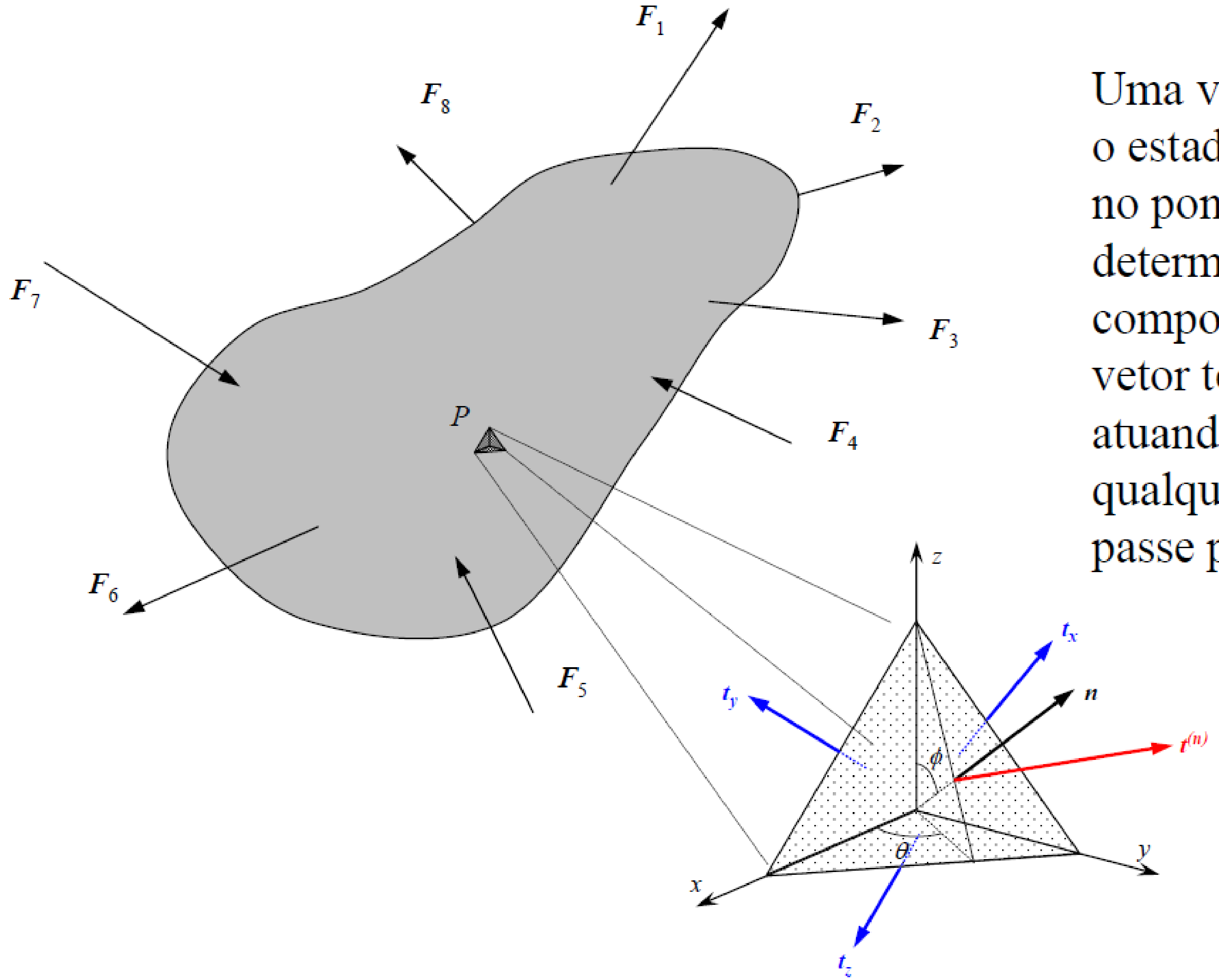


Assumindo que o vetor tensão, $\boldsymbol{t}$, é uniforme ao longo da seção transversal da barra:

$$\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{i}$$

$$A = \int dA = \frac{bh}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t} = \left(\frac{F}{bh}\sin\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{i} \quad \begin{cases} t_n = \dfrac{F}{bh}\sin^2\alpha \\ t_s = \dfrac{F}{bh}\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

Um ponto qualquer em um corpo qualquer e um carregamento qualquer



Uma vez conhecido o estado de tensão no ponto, pode-se determinar as componentes do vetor tensão atuando sobre qualquer plano que passe pelo ponto

Estado de Tensão em um Ponto

O equilíbrio do tetraedro requer:

$$\boldsymbol{t}^{(n)} A_n + \boldsymbol{t}_x A_x + \boldsymbol{t}_y A_y + \boldsymbol{t}_z A_z = 0$$

onde A_x , A_y e A_z são as áreas de suas faces.

Definindo-se

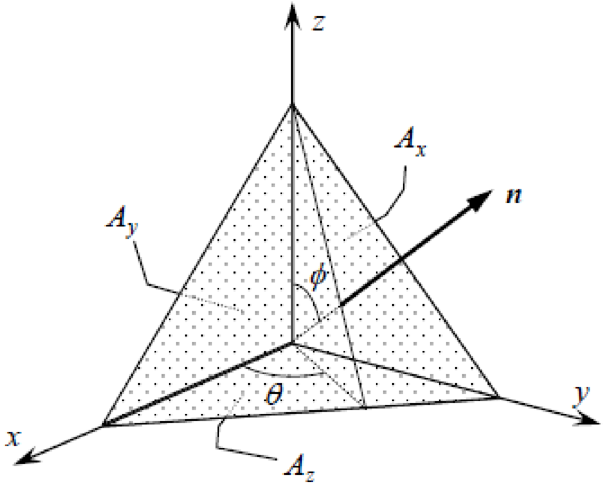
$$\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{i} + n_y \boldsymbol{j} + n_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{t}^{(n)} = t_x^{(n)} \boldsymbol{i} + t_y^{(n)} \boldsymbol{j} + t_z^{(n)} \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{t}_x = -\sigma_{xx} \boldsymbol{i} - \sigma_{xy} \boldsymbol{j} - \sigma_{xz} \boldsymbol{k}$$

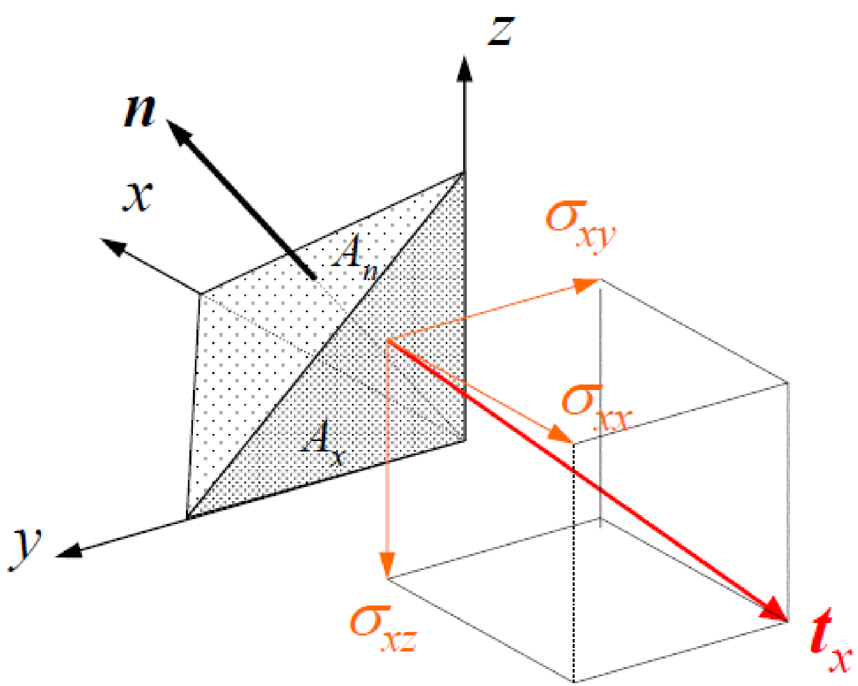
$$\boldsymbol{t}_y = -\sigma_{yx} \boldsymbol{i} - \sigma_{yy} \boldsymbol{j} - \sigma_{yz} \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{t}_z = -\sigma_{zx} \boldsymbol{i} - \sigma_{zy} \boldsymbol{j} - \sigma_{zz} \boldsymbol{k}$$



Coordenadas Globais

Decomposição do *vetor tensão* em componentes nas direções dos eixos Cartesianos



$$\boldsymbol{t}_x = -\sigma_{xx}\boldsymbol{i} - \sigma_{xy}\boldsymbol{j} - \sigma_{xz}\boldsymbol{k}$$

Ainda coordenadas

$$n_x = \sin\phi\cos\theta,\ n_x = \sin\phi\sin\theta,\ \text{e}\ n_x = \cos\phi$$

$$A_x = A_n n_x,\ A_y = A_n n_y,\ \text{e}\ A_z = A_n n_z$$

Substituindo-se estes resultados na equação de equilíbrio, obtém-se:

$$t_x^{(n)} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

$$t_y^{(n)} = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z$$

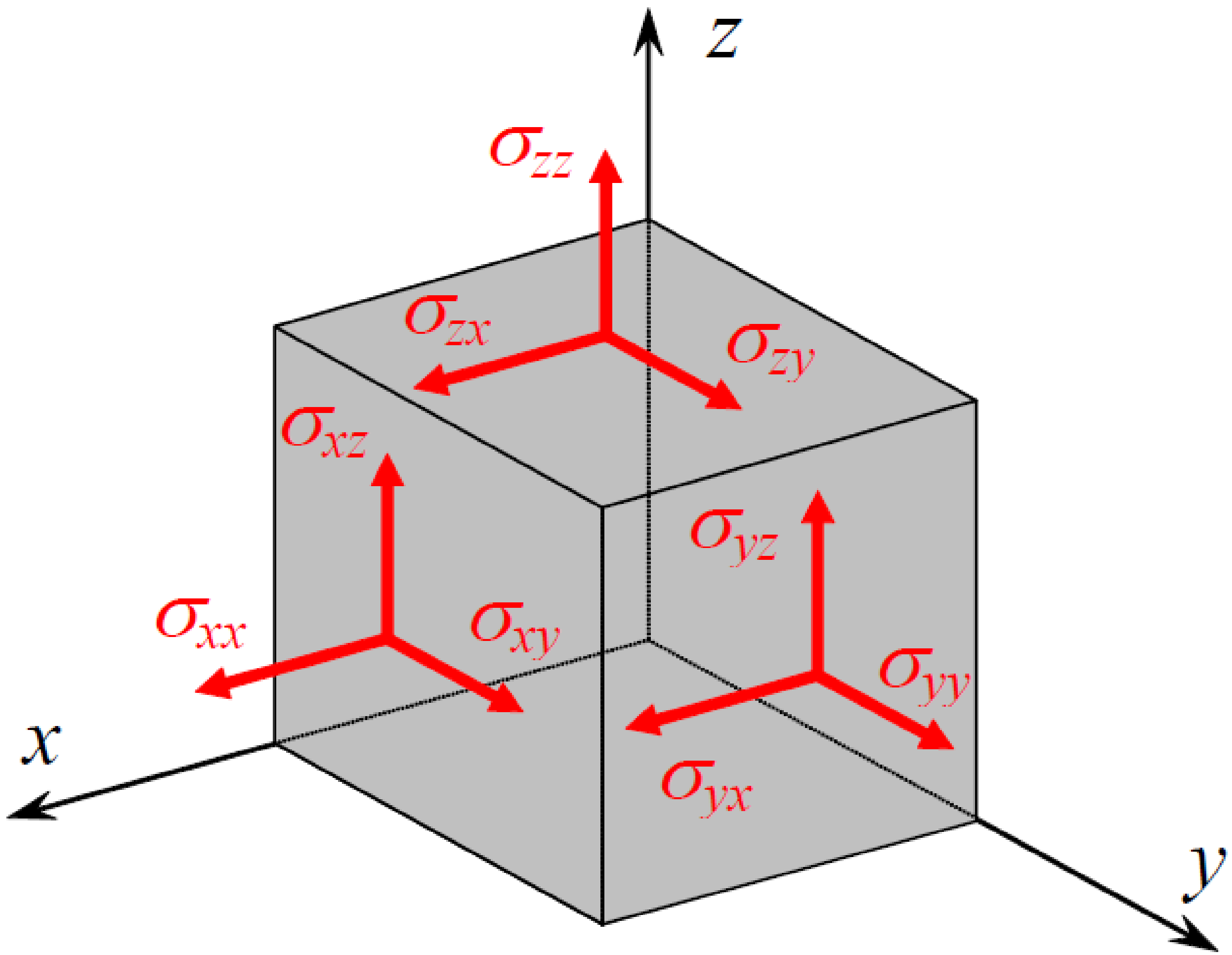
$$t_z^{(n)} = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

Tensores representados em coordenadas por matrizes

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n}$$

Uma visão geométrica



O tensor das tensões

- Esforços internos – grandeza tensorial
- Tensor das tensões é simétrico (balanço de momentos a ser satisfeito)
- Representação em coordenadas : matrizes (assim como vetores, conhecida a matriz em um sistema de coordenadas você pode escreve-la em qualquer outro ; álgebra linear)