LNCC - Programa de Verão 2008

Minicurso M16
Estrutura de Dados e Solvers

Lucia Catabriga

LCAD - Laboratório de Computação de Alto Desempenho

Departamento de Informática - CT/UFES

Ementa do Curso

- Introdução
- Estudo de Armazenamento de Matrizes Esparsas:
  - armazenamentos globais e armazenamentos locais aplicados ao método das diferenças finitas e ao método dos elementos finitos;
- Métodos de solução de sistemas lineares: Diretos, iterativos;
- Métodos Iterativos: Estacionários, Não-estacionários;
- Métodos Não-estacionários:
  - Método dos Gradientes Conjugados;
  - Método do Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES);
  - Métodos das direções conjugadas à esquerda (LCD);
- Estudo de Precondicionadores:
  - Fatorações tipo Gauss-Seidel e fatorações tipo ILU.
- Solução de sistemas não-lineares:
  - Método de Newton inexato;
  - Critérios de parada.

Referências

- Barret, R, et al., ``Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods'', SIAM, 1994.
- Shewchuk, J. R., ``An Introduction to the Conjugate Gradient Method Withuot the Agonizing Pain'', 1994.
- Numerical Methods for Engineers - Steven C. Chapa e Raymond P. Canale - Ed. McGraw-Hill - 2a.Edição - 1990
- Dongarra, J.J., Duff, I.S., Sorasen, D.C., Van der Vorst, H.A., Numerical LInear Algebra for High-Performance Computers, SIAM, 1998.
- Golub, G. and Van Loan, C., "Matrix Computations", The John Hopkins University Press,1993.
- Kelley C.T., "Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations", SIAM, 1995.
- Saad, Y., "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", PWS Publishing Company, 1996.
- White, R.E., "Computational Modeling with Methods and Analysis", 2003.

1 - Introdução

- Processos de Solução
- Método das Diferenças Finitas
- Método dos Elelentos Finitos
- Estrutura de Dados envolvidas

Processo de Solução

- Fenômeno Natural
- Modelo Matemático - Equações Governantes
- Métodos de Aproximação

Diferenças Finitas
Volumes Finitos
Elementos Finitos
Elementos de Contorno

Etapas de Solução

Pré-processamento dos dados:

- Condições de Contorno
- Condições Iniciais
- Definição do domínio discretizado

Processamento de solução:

- Para cada ponto de interesse do domínio discretizado da malha montar estrutura de solução
- Obter solução aproximada ou solução no tempo corrente

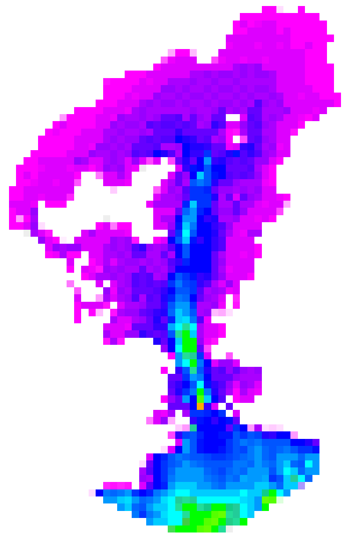
Pós-processamento dos Resultados:

- Visualização e análise dos resultados obtidos

Exemplo do Processo de Solução

Domínio Real

Domínio Discretizado



Solução Aproximada

Dispersão de Poluentes na Baía de Guanabara

Processo de Solução

Não dependem do Tempo

Equação Diferencial Parcial

↓

Aproximação do domínio

↓

Solução do Sistema (Linear ou Não-Linear)

Dependem do Tempo

Equação Diferencial Parcial

↓

Aproximação do domínio
Eq. Diferencial Ordinária

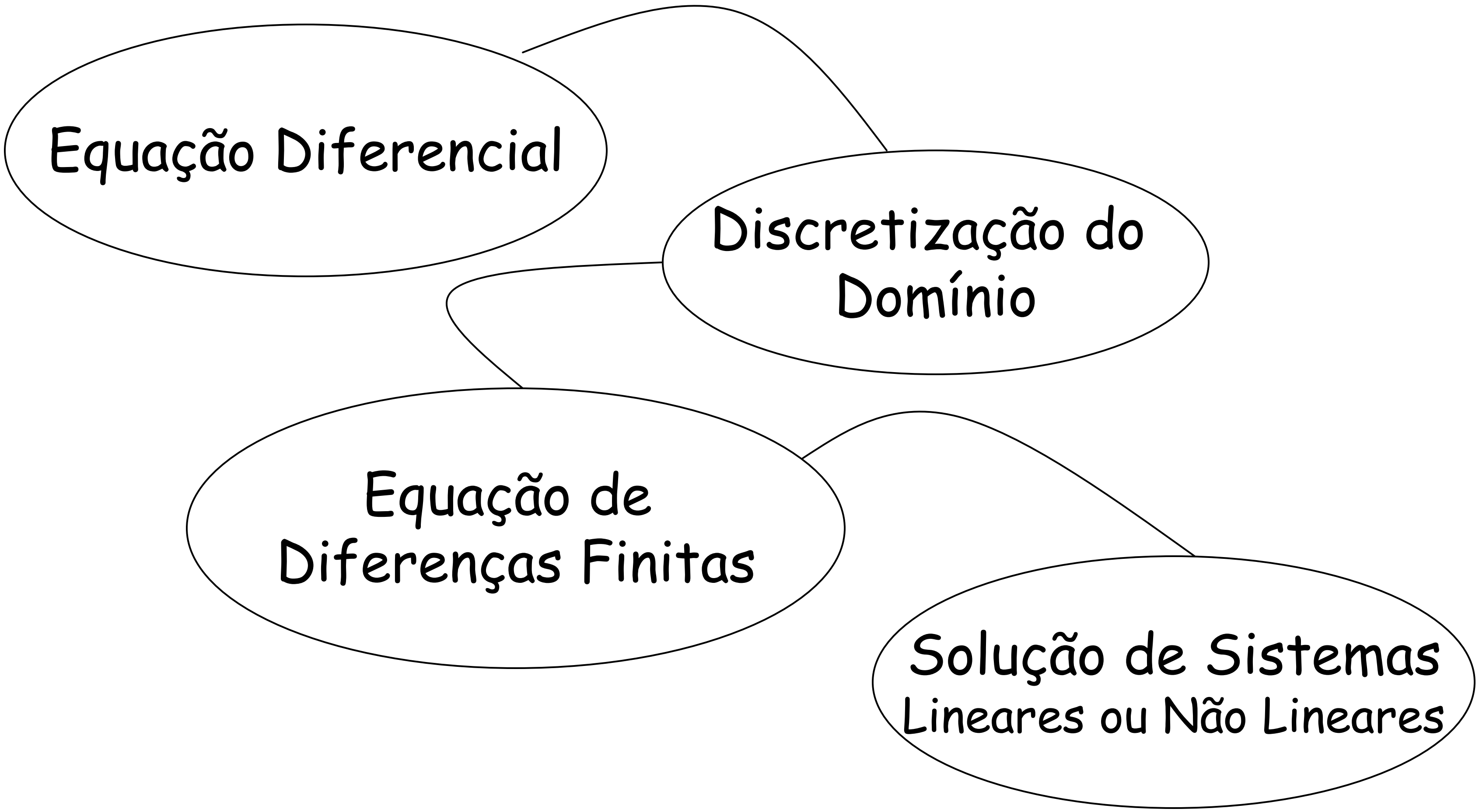
↓

Aproximação no Tempo

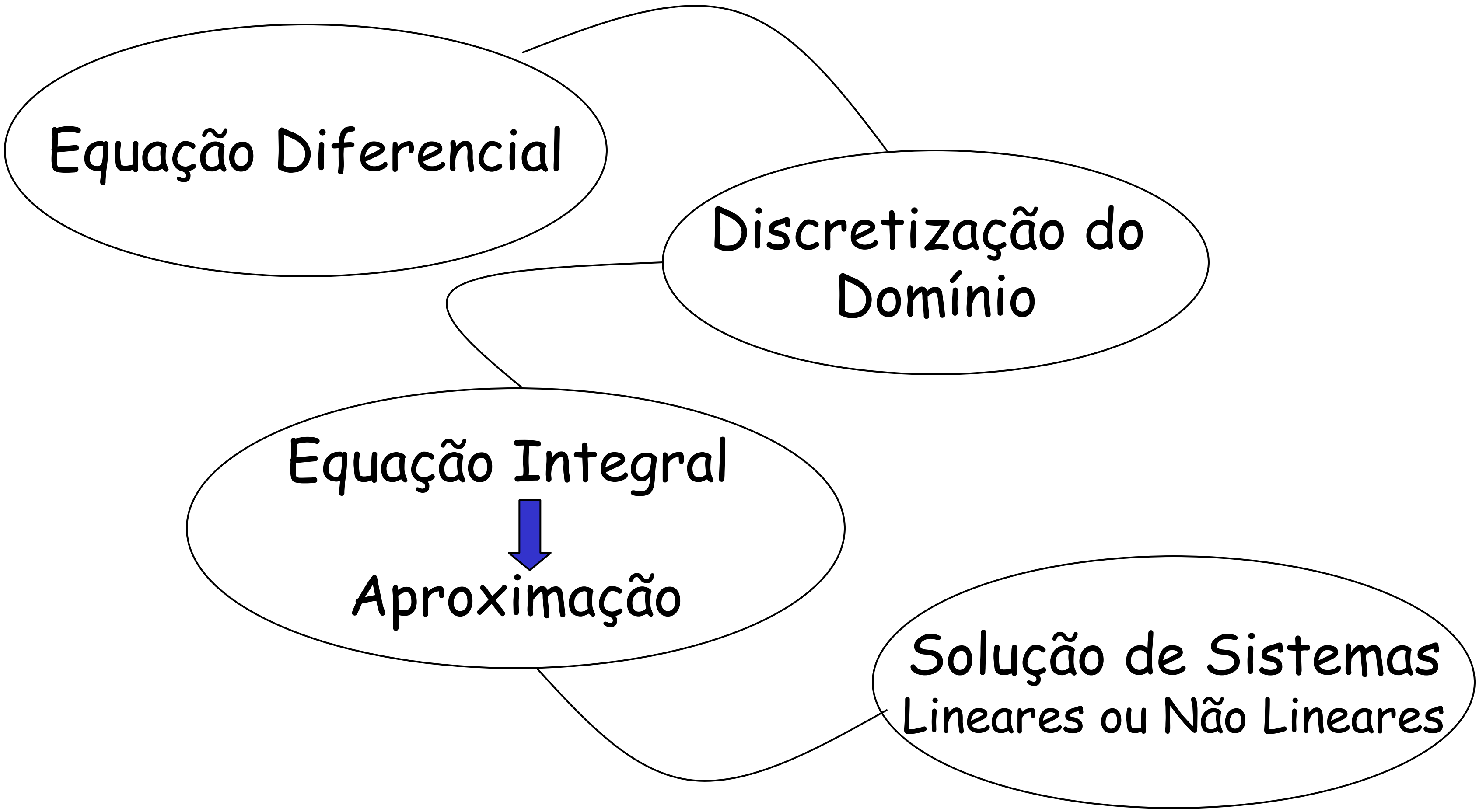
↓

Solução do Sistema
em cada passo de tempo

Método das Diferenças Finitas (MDF)



Método dos Elementos Finitos



MDF: exemplo de solução para equação 1D

Equação diferencial contínua

$$\begin{cases} u'' = f \quad em \quad (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1- Discretização do Domínio:

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \cdots x_{n+1} = 1$$

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

2 - Aproximação das derivada por "diferenças":

$$u' = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, \; O(\Delta x)$$

$$u' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \; O(\Delta x^2)$$

$$u' = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}, \; O(\Delta x)$$

$$u'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}, \; O(\Delta x^2)$$

MDF: exemplo de solução para equação 1D

2 - Aproximação das derivada por "diferenças":

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}_{b} u_{i-1} + \underbrace{\left(-\frac{2}{\Delta x^2}\right)}_{a} u_i + \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}_{b} u_{i+1} = f_i\,,\quad i = 1,\cdots,n$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix}$$

A é tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

MDF: exemplo de solução para equação 2D

Equação diferencial contínua

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad em\ (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \\ \\ u = g(x,y) \quad e/ou \quad \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h(x,y) \quad em\,\Gamma \end{cases}$$

1- Discretização do Domínio:

$$0 = x_0 \le x_1 \le \cdots x_{i-1} \le x_i \le x_{i+1} \le \cdots x_{n+1} = 1, \quad x_i = x_0 + i\Delta x$$

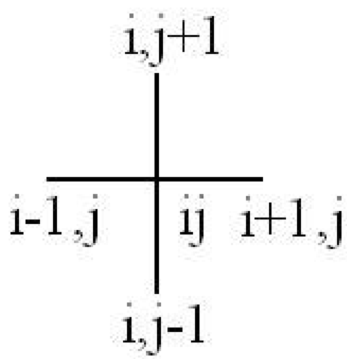
$$0 = y_0 \le y_1 \le \cdots y_{j-1} \le y_j \le y_{j+1} \le \cdots y_{m+1} = 1, \quad y_j = y_0 + j\Delta y$$

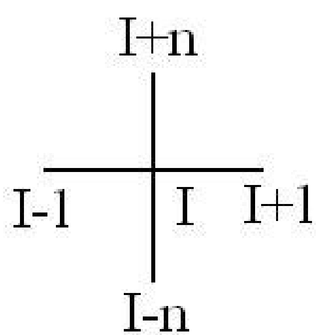
2 - Aproximação das derivada por "diferenças":

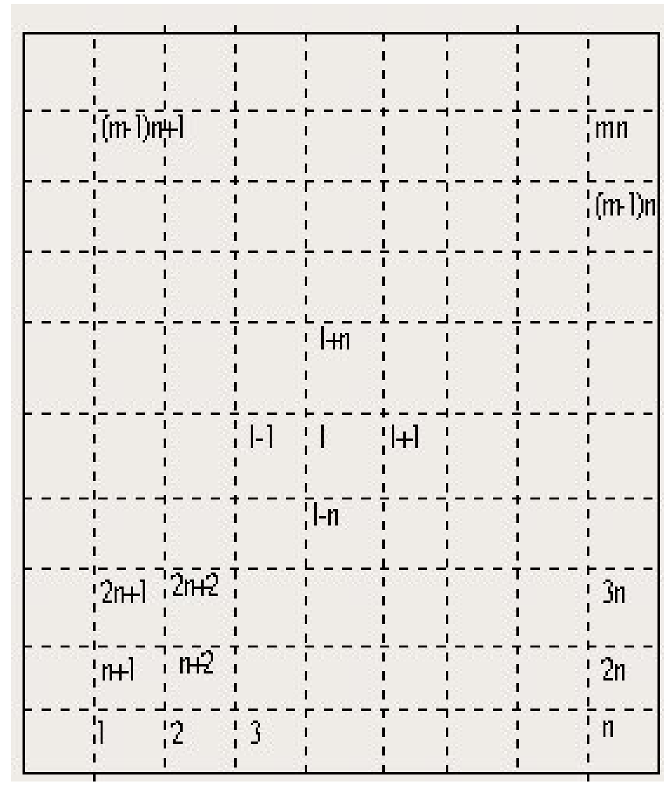
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x},\ O(\Delta x^2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2},\ O(\Delta x^2)$$

MDF: exemplo de solução para equação 2D

Numeração das incognitas:







$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{\Delta y^2}=f_{ij}\,,\; i=1,\cdots,n \quad j=1,\cdots,m$$

$$\frac{u_{I-1}-2u_I+u_{I+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{I-n}-2u_I+u_{I+n}}{\Delta y^2}=f_I,\;\; I=1,\cdots,N$$

MDF: exemplo de solução para equação 2D

2 - Aproximação das derivada por "diferenças":

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Delta y^2}\right)}_{c} u_{I-n} + \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}_{b} u_{I-1} \underbrace{-2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)}_{a} u_I$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}_{b} u_{I+1} + \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta y^2}\right)}_{c} u_{I+n} = f_I \, , \; I = 1, \cdots, n \times m$$

$$\begin{bmatrix} a & b & & c & & & & & \\ b & a & b & & c & & & & \\ & b & a & 0 & & c & & & \\ c & & 0 & a & b & & c & & \\ & c & & b & a & b & & c & \\ & & c & & b & a & 0 & & c \\ & & & c & & 0 & a & b & \\ & & & & c & & b & a & b \\ & & & & & c & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - cu_S - bu_O \\ f_2 - cu_S \\ f_3 - cu_S - bu_L \\ f_4 - bu_O \\ f_5 \\ f_6 - bu_L \\ f_7 - bu_O - cu_N \\ f_8 - cu_N \\ f_9 - cu_N - bu_L \end{bmatrix}$$

A é Pentadiagonal

MDF: Matrizes Esparsas Resultantes

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\ & b_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\ c_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\ & c_5 & & b_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\ & & c_6 & & b_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\ & & & c_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\ & & & & c_8 & & b_8 & a_8 & b_8 \\ & & & & & c_9 & & b_9 & a_9 \end{bmatrix}$$

Diferenças Finitas → Matrizes pentadiagonais

MEF: exemplo de solução para a equação 1D

Formulação Forte

$$\begin{cases} u'' = f \quad em \quad (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$u'(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Formulação Variacional ou Formulação Fraca

$$Encontrar \quad u \in V \;\; tal \;\; que \;\; \forall v \in V, \; -\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx$$

MEF: exemplo de solução para a equação 1D

Formulação Variaconal Aproximada

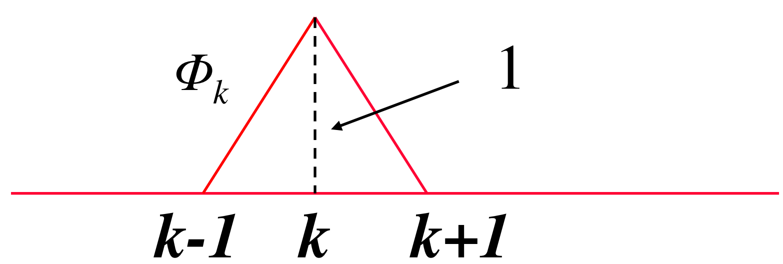
$$0 = x_0 \le x_1 \le \cdots x_{i-1} \le x_i \le x_{i+1} \le \cdots x_{n+1} = 1$$

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

$$V = \{u : [0,1] \to \mathbb{R}, u \text{ é contínua}, u/[x_k, x_{k+1}] \text{ é linear}, k = 0, \cdots, n \text{ e } u(0) = u(1) = 0\}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & se \ x \in [x_{k-1}, x_k] \\[2ex] \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & se \ x \in [x_k, x_{k+1}] \\[2ex] 0 & se \ x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases}$$

Escolher Φ_k com suporte compacto, isto é:



MEF: exemplo de solução para a equação 1D

$$Encontrar \quad u \in V \ \ tal \ \ que \ \forall v \in V, \ -\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx$$

$$u^h(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k \phi_k(x) \qquad f^h(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \phi_k(x)$$

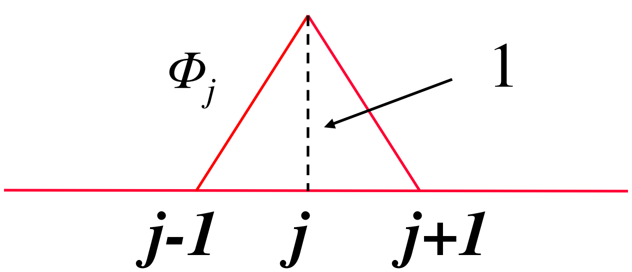
$$Encontrar \quad u^h \in V^h \ \ tal \ \ que \ \forall v^h \in V^h, \ -\int_0^1 u^h{}'v^h{}'dx = \int_0^1 f^h v^h dx$$

$$-\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(u_j \phi'_j(x) \right) \ \phi'_i(x)dx = \int_0^1 f^h \phi_i(x)dx \ \ \forall \phi_i, \ i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(-\int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)dx \right) u_j = \int_0^1 f^h \phi_i(x)dx \ \ \forall \phi_i, \ i = 1, \cdots, n$$

MEF: exemplo de solução para a equação 1D

Como Φ_j possui suporte compacto, $\Phi_j'(x)\ \Phi_j'(x)$ é diferente de zero somente para i = j-1, j e j+1



$$\boxed{Au = b}$$

A é tridiagonal

MEF: exemplo de solução para a equação 1D

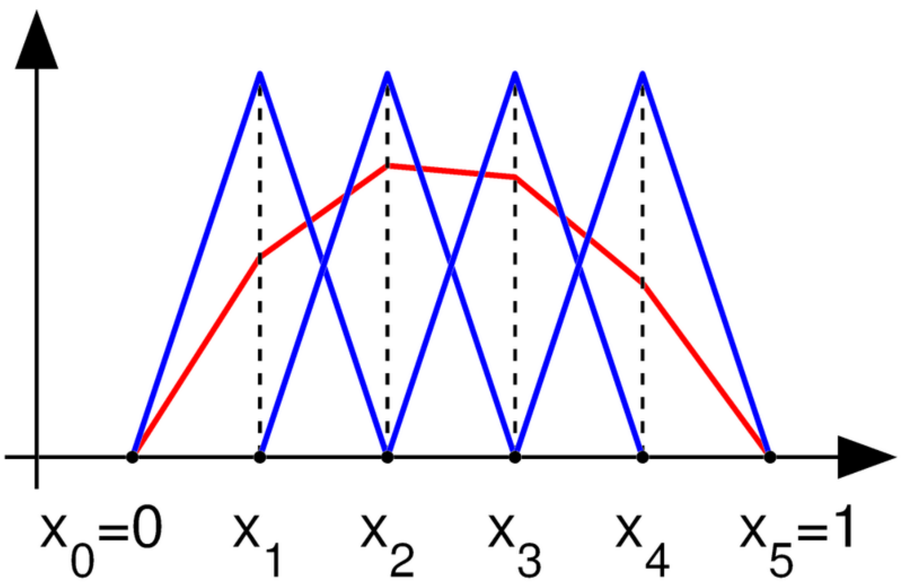
$$A = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{Nel} k^e$$

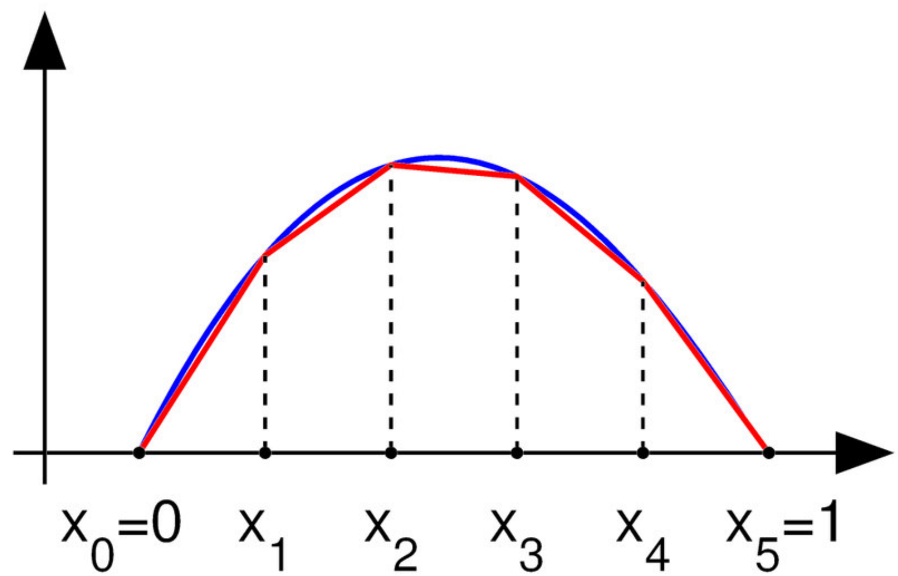
$$b = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{Nel} f^e$$

$$Au = b$$

$$k^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$u^h(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k \phi_k(x)$$





MEF: exemplo de solução para equação 2D

Equação diferencial contínua

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad em \ (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \ em \, \Gamma \end{cases}$$

Formulação Variacional ou Formulação Fraca

$$Encontrar \quad u \in V \ \ tal \ \ que \ \forall v \in V, \ -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

MEF: exemplo de solução para equação 2D

$$u^h(x,y) = \sum_{k=1}^{n} u_k \phi_k(x,y) \qquad\qquad f^h(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k \phi_k(x,y)$$

Formulação Variacional Aproximada

$$\boxed{Encontrar \;\; u^h \in V^h \;\; tal \;\; que \; \forall v^h \in V^h, \; -\int_\Omega \nabla u^h . \nabla v^h \, d\Omega = \int_\Omega f \, v^h \, d\Omega}$$

$$-\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left(u_j \nabla \phi_j \right) . \nabla \phi_i d\Omega = \int_\Omega f^h \phi_i d\Omega \;\; \forall \phi_i, \; i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(-\int_\Omega \nabla \phi_j . \nabla \phi_i d\Omega \right) u_j = \int_0^1 f^h \phi_i d\Omega \;\; \forall \phi_i, \; i = 1, \cdots, n$$

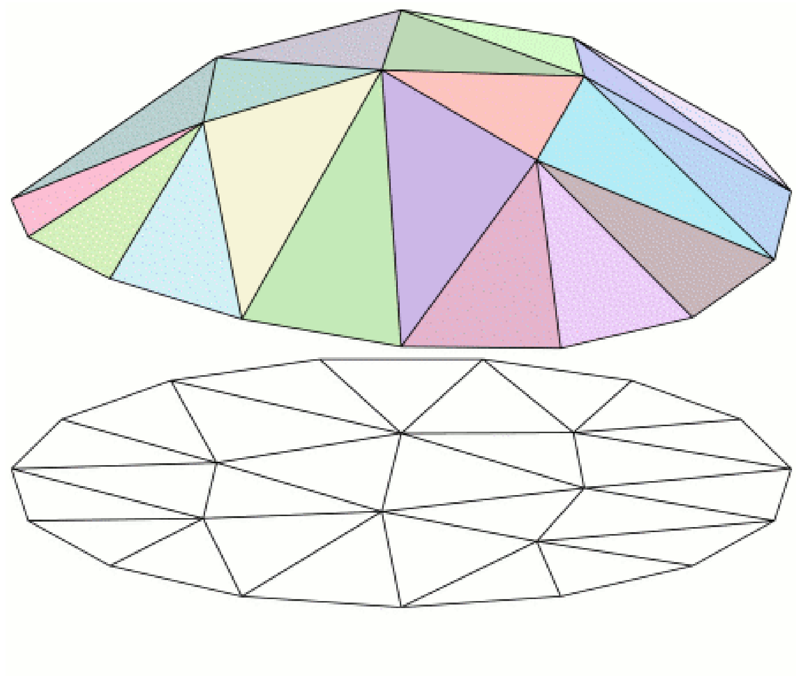
$$\boxed{Au = b}$$

A é esparsa

MEF: exemplo de solução para equação 2D

$$A = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{Nel} k^e$$

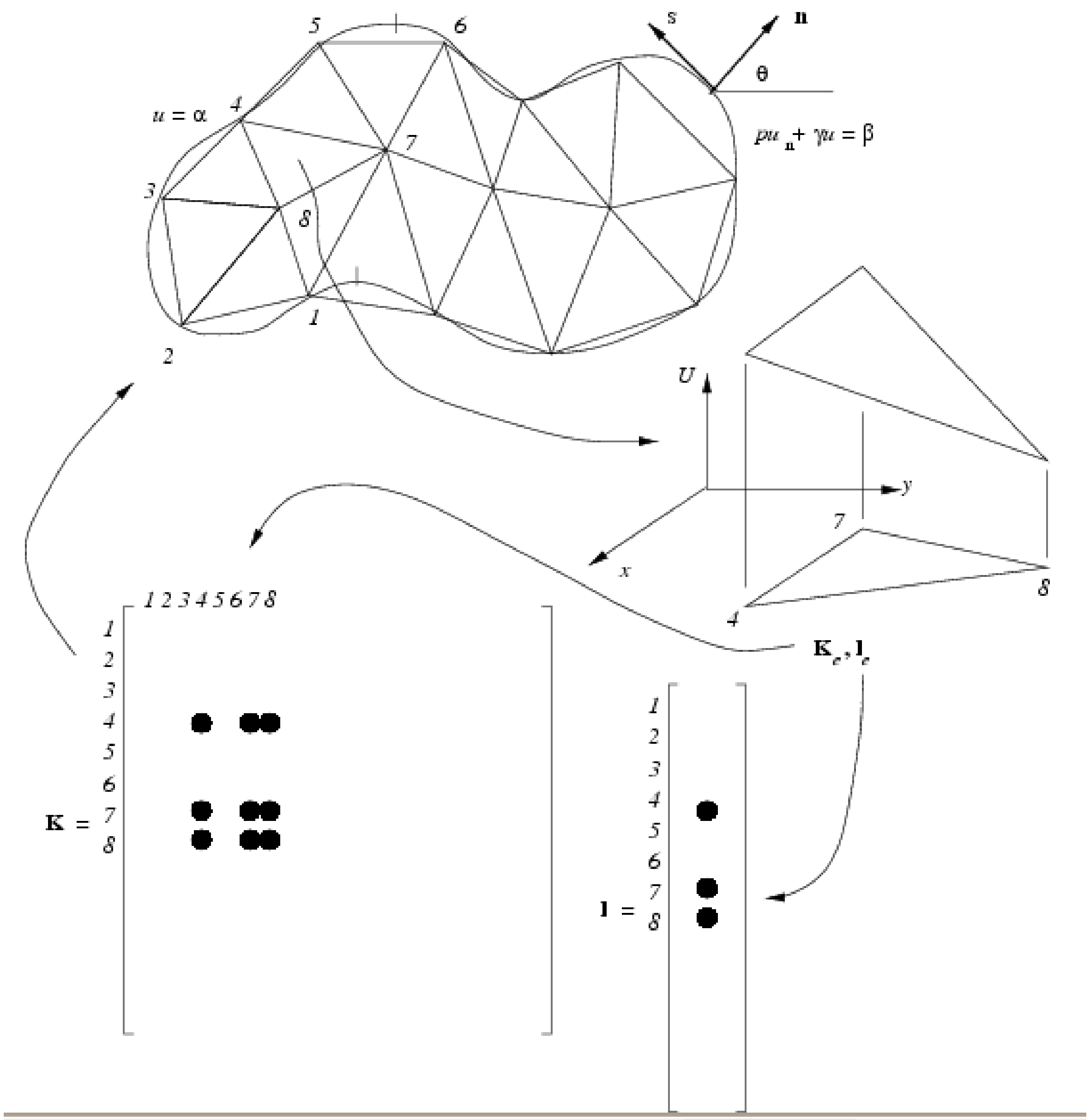
$$b = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{Nel} f^e$$



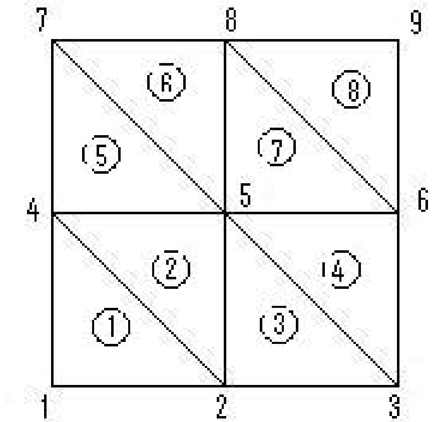
$$k^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,nen} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,nen} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{nen1} & k_{nen2} & \cdots & k_{nen,nen} \end{bmatrix}$$

$$u^e = \sum_{k=1}^{nen} u_k \varphi_k$$

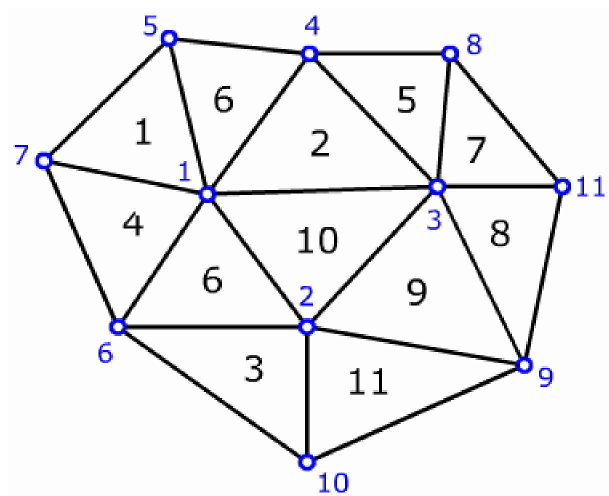
MEF: Montagem da Matriz Esparsa



FEM: Matrizes Esparsas Resultantes



$$K=\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & & k_{14} & & & & & \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & & & & \\
 & k_{32} & k_{33} & & k_{35} & k_{36} & & & \\
k_{41} & k_{42} & & k_{44} & k_{45} & & k_{47} & & \\
 & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & & k_{58} & k_{59} \\
 & & k_{63} & & k_{65} & k_{66} & & & k_{69} \\
 & & & k_{74} & & & k_{77} & k_{78} & \\
 & & & k_{84} & & & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\
 & & & & k_{95} & k_{96} & & k_{98} & k_{99}
\end{bmatrix}$$



$$K=\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & & & & \\
a_{2,1} & a_{22} & a_{2,3} & & & a_{2,6} & & & a_{2,9} & a_{2,10} & \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & & & & a_{3,8} & a_{3,9} & & a_{3,11} \\
a_{4,1} & & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & & & a_{4,8} & & & \\
a_{5,1} & & & a_{5,4} & a_{5,5} & & a_{5,7} & & & & \\
a_{6,1} & a_{6,2} & & & & a_{6,6} & a_{6,7} & & & a_{6,10} & \\
a_{7,1} & & & & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} & & & & \\
 & & a_{8,3} & a_{8,4} & & & & a_{8,8} & & & a_{8,11} \\
 & a_{9,2} & a_{9,3} & & & & & & a_{9,9} & a_{9,10} & a_{9,11} \\
 & a_{10,2} & & & & a_{10,6} & & & a_{10,9} & a_{10,10} & \\
 & & a_{11,3} & & & & & a_{11,8} & a_{11,9} & & a_{11,11}
\end{bmatrix}$$

2 – Breve estudo de matrizes Esparsas

- Matrizes esparsas x Solução de sistemas Lineares
- Armazenamentos Globais
- Armazenamentos Locais

Matrizes Esparsas x Métodos de Solução

- Métodos diretos:
  - Solução exata a menos de erros de arredontamento. Transformação do sistema em sistemas triviais modificando os coeficientes da matriz esparsa e alterarando a esparsidade.
- Métodos Iterativos:
  - Solução aproximada com tolerância pré-fixada. Não há alteração dos coeficentes nem da esparsidade da matriz
  - Dependem de condições de convergência
  - Necessidade do produto matriz-vetor

Armazenamento de Matrizes Esparsas
Estratégias Globais

Compressed Diagonal Storage (CDS)

$$
A = \begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & & c_1 & & & & & \\
d_2 & a_2 & b_2 & & c_2 & & & & \\
 & d_3 & a_3 & 0 & & c_3 & & & \\
e_4 & & 0 & a_4 & b_4 & & c_4 & & \\
 & e_5 & & d_5 & a_5 & b_5 & & c_5 & \\
 & & e_6 & & d_6 & a_6 & 0 & & c_6 \\
 & & & e_7 & & 0 & a_7 & b_7 & \\
 & & & & e_8 & & d_8 & a_8 & b_8 \\
 & & & & & e_9 & & d_9 & a_9
\end{bmatrix}
\Rightarrow AA = \begin{bmatrix}
 & & a_1 & b_1 & c_1 \\
 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\
 & d_3 & a_3 & 0 & c_3 \\
e_4 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\
e_5 & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 \\
e_6 & d_6 & a_6 & 0 & c_6 \\
e_7 & 0 & a_7 & b_7 & \\
e_8 & d_8 & a_8 & b_8 & \\
e_9 & d_9 & a_9 & &
\end{bmatrix}
\quad ou \quad AA = \begin{bmatrix}
 & & & a_1 & b_1 & 0 & c_1 \\
 & & d_2 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 \\
 & 0 & d_3 & a_3 & 0 & 0 & c_3 \\
e_4 & 0 & 0 & a_4 & b_4 & 0 & c_4 \\
e_5 & 0 & d_5 & a_5 & b_5 & 0 & c_5 \\
e_6 & 0 & d_6 & a_6 & 0 & 0 & c_6 \\
e_7 & 0 & 0 & a_7 & b_7 & 0 & \\
e_8 & 0 & d_8 & a_8 & b_8 & 0 & \\
e_9 & 0 & d_9 & a_9 & 0 & &
\end{bmatrix}
$$

A matriz de ordem nxn

AA matriz de ordem nx5 ou nx(2p+1)

Armazenamento de Matrizes Esparsas Estratégias Globais

Compressed Sparse Row (CSR)

$$A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & k_{14} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & & & & \\ & k_{32} & k_{33} & & k_{35} & k_{36} & & & \\ k_{41} & k_{42} & & k_{44} & k_{45} & & k_{47} & & \\ & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & & k_{58} & k_{59} \\ & & k_{63} & & k_{65} & k_{66} & & & k_{69} \\ & & & k_{74} & & & k_{77} & k_{78} & \\ & & & k_{84} & & & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\ & & & & k_{95} & k_{96} & & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix}$$

A: matriz de ordem nxn

nnz: número de coeficientes não nulos

$$AA = \begin{bmatrix} \overbrace{k_{11}}^{1} & k_{12} & k_{14} & \overbrace{k_{21}}^{4} & k_{22} & \ldots & k_{25} & \overbrace{k_{32}}^{9} & k_{33} & \ldots & k_{89} & \overbrace{k_{95}}^{36} & k_{96} & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix}$$

$$JA = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 9 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9]$$

$$IA = [1 \quad 4 \quad 9 \quad 13 \quad 18 \quad 25 \quad 29 \quad 32 \quad 36 \quad 40]$$

AA, *JA*: vetores de ordem nnz

IA: vetor de ordem n+1

Armazenamento de Matrizes Esparsas
Estratégias Globais

Skyline Storage (SKS)

$$A = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & & & & & \\ & k_{32} & k_{33} & & & & & & \\ k_{41} & k_{42} & & k_{44} & & & & & \\ & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & & & & \\ & & k_{63} & & k_{65} & k_{66} & & & \\ & & & k_{74} & & & k_{77} & & \\ & & & k_{84} & & & k_{87} & k_{88} & \\ & & & & k_{95} & k_{96} & & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix}$$

A: matriz simétrica de ordem nxn

$$AA = \begin{bmatrix} \overbrace{k_{11}}^{1} & \overbrace{k_{21}}^{2} & k_{22} & \overbrace{k_{32}}^{4} & k_{33} & \overbrace{k_{41}}^{6} & k_{42} & 0 & k_{44} & \dots & \overbrace{k_{95}}^{27} & k_{96} & 0 & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix}$$

$$IA = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 10 \quad 14 \quad 18 \quad 22 \quad 27 \quad 31]$$

AA: vetor de ordem nnz+q

IA: vetor de ordem n+1

Armazenamento de Matrizes Esparsas Estratégias Globais

Algoritmo Produto Matriz-vetor CSR

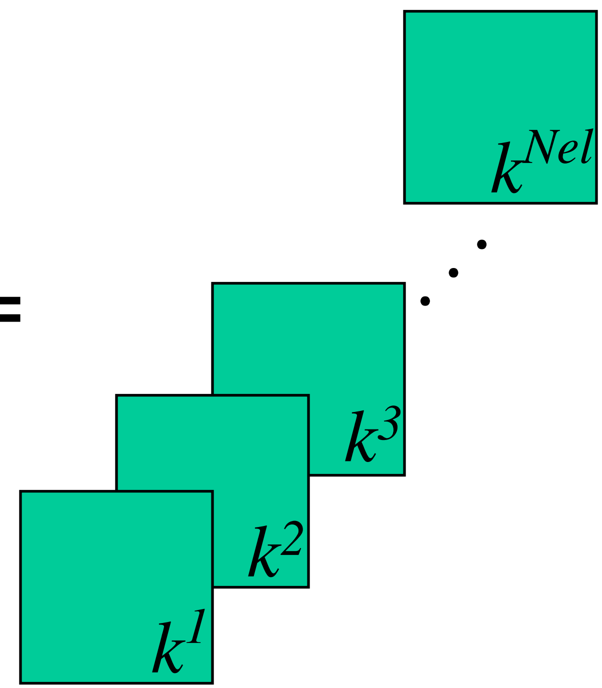
```
para i=1,2,…,n
      k1 = IA(i)
      k2 = IA(i+1)-1
      para j = k1,…, K2
           y(i)= y(i) + AA(j)*v(JA(j))
      fim_para ! j
Fim_para ! i
```

Elemento por Elemento (EBE)

$$K = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{nel} k^e$$

$$k^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,nen} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,nen} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{nen1} & k_{nen2} & \cdots & k_{nen,nen} \end{bmatrix}$$

$K =$



Armazenamento de Matrizes Esparsas
Estratégias Locais

Algoritmo Produto Matriz-Vetor EBE

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \left(\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel} A^e\right)\mathbf{v} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel} A^e v^e$$

```
para e=1,2,…,nel
      localize: ve ← v(e)
      produto: ave ← ke*ve
      espalhe e acumule:  v(e) ← v(e) + ave
fim_para ! e
```

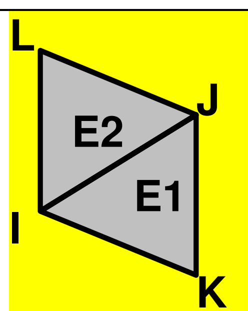
Armazenamento de Matrizes Esparsas
Estratégias Locais

Aresta por Aresta (EDS)

- **Desmembramento da matriz elemento nas componentes das arestas**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}_{Elemento} = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Aresta1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}}_{Aresta2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times \end{bmatrix}}_{Aresta3}$$

- **Soma das contribuições das arestas dos elementos adjacentes**



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}}_{ArestaIJ} = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{bmatrix}}_{E1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{bmatrix}}_{E2}$$

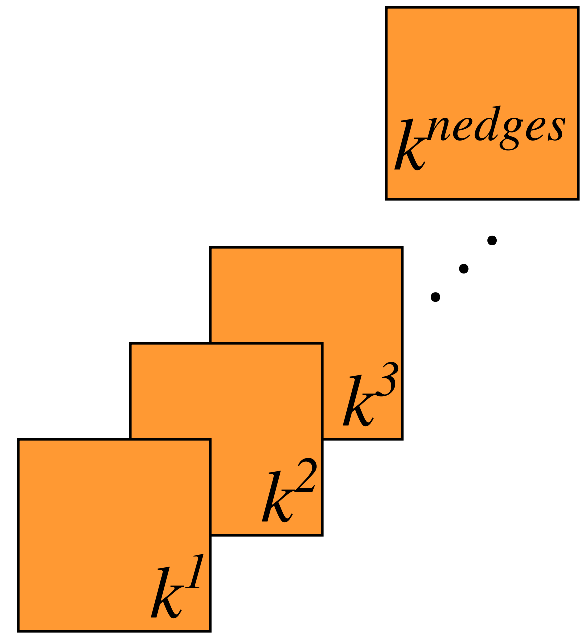
Armazenamento de Matrizes Esparsas Estratégias Locais

Aresta por Aresta (EDS)

$$K = \mathop{\mathbf{A}}_{s=1}^{nedges} k^s$$

$$k^s = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,ned} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,ned} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ned1} & k_{ned2} & \cdots & k_{ned,ned} \end{bmatrix}$$

$K =$



Armazenamento de Matrizes Esparsas Estratégias Locais

Algoritmo Produto Matriz-Vetor EDS

$$\mathbf{Av} = \left(\sum_{e=1}^{nedges} A^e\right)\mathbf{v} = \sum_{e=1}^{nedges} k^e v^e$$

```
para s=1,2,…,nedges
      localize: vs ← v(s)
      produto: avs ← ks*vs
      espalhe e acumule:  v(s) ← v(s) + avs
fim_para ! s
```