3. Discretização: Elementos Finitos

3.1 - Considerações Iniciais

O Problema Dinâmico da Elasticidade Linear caracteriza-se pela seguinte equação variacional (forma particular do P.P.V.):

$$\langle \rho_0 \ddot{u}, v \rangle + a(u,v) = f(v) \qquad \forall\, v \in U \qquad (1)$$

onde U ... conjunto dos deslocamentos admissíveis

$$\left(U = \{ v \in H^1(\Omega) \; ; \; v(\Gamma_1) = 0 \} \right)$$

$a(u,v)$ ..... "parcela elástica"

$$a(u,v) = \langle T, \nabla v \rangle = \langle \lambda \operatorname{div} u\, I + 2\mu\, \varepsilon(u), \nabla v \rangle$$

$f(v)$ .... "carregamento" $\quad f(v) = \langle \bar{t}_1, v \rangle_{\Gamma} + \langle f_1, v \rangle$

A equação variacional (1) é equivalente a um problema de valor inicial e de contorno (equação diferencial parcial) linear.

Ainda devem ser consideradas as condições iniciais:

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$\dot{u}(x,0) = V_0(x)$$

Obs.: O caso "estático" é caracterizado pelo problema elíptico:

$$a(u,v) = f(v) \qquad \forall\, v \in U$$

sendo considerado $\rho_0 \ddot{u} \approx 0$

3.2) Aspectos Gerais

Realidade Física

$\Downarrow$

Modelagem Mecânica

$\Downarrow$

Formulação Matemática
(E.D.P)

$\swarrow$ Sol. Analítica

$\searrow$ Discretização $u = \sum_{i=1}^{M} u_i(t)\, \varphi_i(x)$

Aproximação Numérica
- Dif. Finitas
- El. Finitos

- Diferenças Finitas $\longrightarrow$ Discretização obtida através da troca de derivadas por aproximações (quocientes: $\frac{du}{dx} \sim \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ $\quad \Delta x \ll 1$)

- Volumes Finitos $\longrightarrow$ Dif. Finitas + Formulação Integral

- Elementos Finitos $\longrightarrow$ Formulação Variacional + Interpolação

3.3) Elementos Finitos:

$$U \xrightarrow[\text{DISCRETIZAÇÃO}]{} U_h = \{ v_h \in P,\ v_h(\Gamma_1) = 0 \}$$

Problema (1) é substituído por

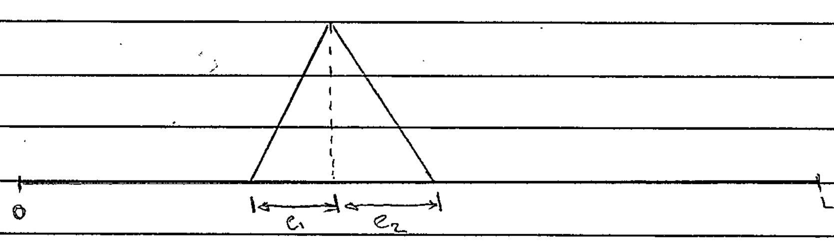
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h \in U_h \text{ tq} \\ \langle \rho_0 \ddot{u}_h, v_h \rangle + a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in U_h \end{array}} \qquad (2)$$

onde $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x)$

$\varphi_i(x)$ → funções de interpolação

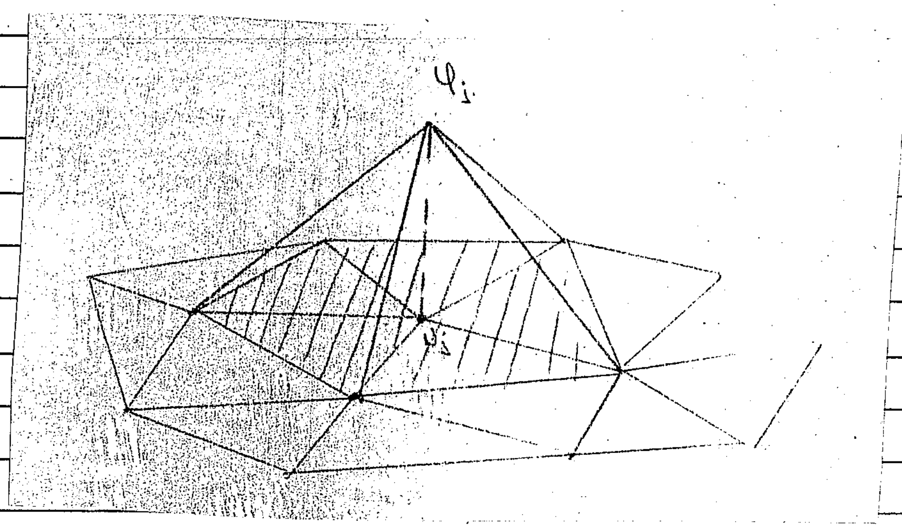
M.E.F. → escolha particular para φ_i: "polinômios por partes"

Exemplo: Domínio unidimensional:



As "partes" são partições do domínio ($\subset \mathbb{R}^n$) com formatos geométricos particulares (triângulos, quadriláteros, tetraedros, ...) que "ganham" uma estrutura de "elementos"

$$\text{Funções de Base} \qquad \varphi_j(\underbrace{N_i}_{\text{"nó"}}) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \underbrace{i,j = 1, \dots, N}_{\text{"número total de nós"}}$$



- Suporte Compacto → Nível Elementar → Matrizes Esparsas

- Método de Galerkin $v \in U$

$$a(u,v) = (f,v)$$

$$\Big\downarrow \text{M.E.F.}$$

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

$$\Big\downarrow \text{Pb. Matricial}$$

$$A\xi = b$$

$A = [A_{ij}]_{N \times N}$ $\quad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ $\quad ; \quad$ $b = [b_i]_{N \times 1}$ $\quad b_i = (f, \varphi_i)$

3.4) Implementação Computacional

Ver Mec. Sol. III

3.5) "Semi-Discretização:

$$u_h(x,t) = \sum{}' \overbrace{u_i(t)}^{\text{"VALORES NODAIS"}} \underbrace{\varphi_i(x)}_{\text{"função de base de elementos finitos"}}$$

Obs (i) Na expressão acima admite-se que a variação temporal de uma função em elementos finitos é dada pela variação temporal dos valores nodais

(ii) $$\dot{u}_h(x,t) = \sum{}' \dot{u}_i(t)\, \varphi_i(x) = v(x,t)$$

(iii) $$D u_h(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial X_1}(x,t) & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial X_3} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial u^3}{\partial X_1} & & \frac{\partial u^3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

u^i .... é a componente de $\underset{\sim}{u}$ na direção $\underset{\sim}{e_i}$

$$\frac{\partial u^I}{\partial X_J} = \sum{}' u_i^I(t)\, \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial X_J}$$

Logo $$D u(x,t) = B\, U$$

$$B_{Ji} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_J} \qquad U_{iJ} = u_i^J$$

$$[B]_{3\times N} \qquad [U]_{N\times 3}(t)$$

(iv) Condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x) \quad ; \quad v(x,0) = \dot{u}(x,0) = v_0(x)$$

$$(u_h)_0(x) = \sum' u_0(x_i)\,\varphi_i(x)$$

$$(v_h)_0(x) = \sum' v_0(x_i)\,\varphi_i(x)$$

3.6) Versão Semi-Discreta do P.P.V.:

Repetindo (1): $\langle \rho_0 \ddot{u}, v\rangle + a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V$

"Versão Semi-Discreta"

$$\underbrace{\langle \rho_0 \ddot{u}_h, v_h\rangle}_{\text{"PARCELA INERCIAL"}} + \underbrace{\underbrace{a(u_h, v_h)}_{\text{"PARCELA ELÁSTICA"}} = \underbrace{f(v_h)}_{\text{"CARREGAMENTO"}}}_{\text{"PARCELA "TRADICIONAL" ELÁSTICA"}} \quad \forall v_h \in V_h$$

$$a(u_h, v_h) = \langle \overbrace{\underbrace{\lambda \operatorname{div} u_h I + 2\mu\, \varepsilon(u_h)}_{\text{SIMÉTRICO}}}^{D\,\varepsilon(u_h)}, \nabla v_h\rangle = \langle D\,\varepsilon(u_h), \varepsilon(v_h)\rangle$$

Exercício: Montar Matriz Elementar e vetor de carga elementar (P1)

(i) HIPÓTESE DE DEFORMAÇÃO PLANA

(ii) HIPÓTESE DE TENSÃO PLANA

(iii) PB. TRIDIMENSIONAL

Até agora: (ESTÁTICA)

$$K \bar{u} = F$$

onde $\bar{u}$ é um vetor N-dimensional (N número de nós) contendo os valores nodais de u

Temos $\ddot{u}_h = \sum_{i=1}^{N} \ddot{u}_i \, \varphi_i(x)$

Logo $\langle \rho_0 \ddot{u}_h, v_h \rangle = \int_\Omega \rho_0 \left(\sum \ddot{u}_i \varphi_i(x) \right) \cdot v_h \, dV$

DEFININDO

$$M_{ij} = \int_\Omega \rho_0 \, \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \, dV$$

$$\langle \rho_0 \ddot{u}_h, v_h \rangle \rightsquigarrow M \ddot{\bar{u}}$$

Logo $M \ddot{\bar{u}} + K \bar{u} = F(t)$

Obs: (i) Lembrar que u_h e v_h são vetores de $\mathbb{R}^3$ o que se reflete na construção da matriz de massa → o termo $\int \varphi_i \varphi_j$ se repete em posições diferentes ...

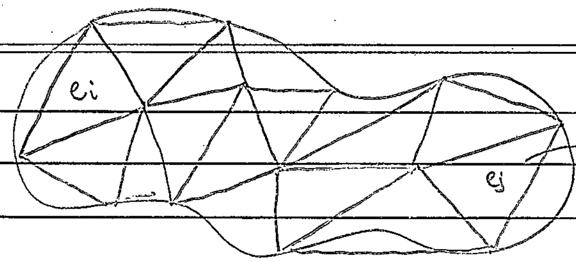
(ii) Ordem de integração: integração exata só é obtida através de uma regra de maior ordem

(iii) Pb. Completo:
$$\left\{ \begin{array}{l} M \ddot{\bar{u}} + K \bar{u} = F(t) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \\ \dot{\bar{u}}(0) = \bar{v}_0 \end{array} \right\} \text{ E.D.O linear em } \mathbb{R}^N$$

Ex: CALCULAR A MATRIZ DE MASSA PARA O CASO TRIDIMENSIONAL (P_1)

(iv) A matriz de massa obtida é conhecida como matriz de massa consistente, em oposição ao modelo de massas concentradas ("lumped") onde imagina-se a massa total do corpo concentrada em alguns pontos (no presente caso nós da malha) gerando uma matriz diagonal (obter!!!)

Ex:



$\Omega_h = \bigcup e_i = e_1 \cup e_2 \ldots \cup e_M$

· Parâmetro de malha h → parâmetro geométrico associado ao elemento (ex: maior lado de um triângulo)

$U_h = \{ v_h : v_h$ é contínua em Ω_h, $v_h|_{e_i}$ é um polinômio de grau k $(v_h|_{e_i} \in P_k(e_i))$ e $v_h|_\Gamma = 0 \}$

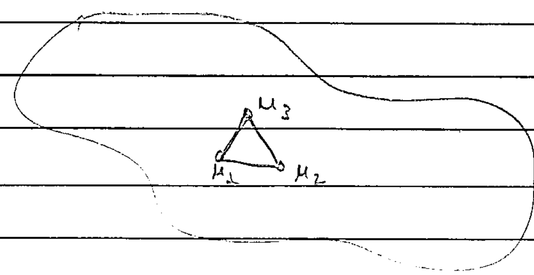
Obs: $U_h \subset U$

Voltando:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{u_i}_{\text{"graus de liberdade"}} \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{NEL} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{M} u_j \varphi_j(x) \right)}_{\text{"nível elementar"}}$$

NEL .... número de elementos

M.E.F (LAGRANGEANO) ⟶ GRAUS DE LIBERDADE = VALORES NODAIS (valores assumidos nos nós)



EXERCÍCIO: CALCULAR MODOS E FREQUÊNCIAS PRÓPRIAS USANDO M.E.F.

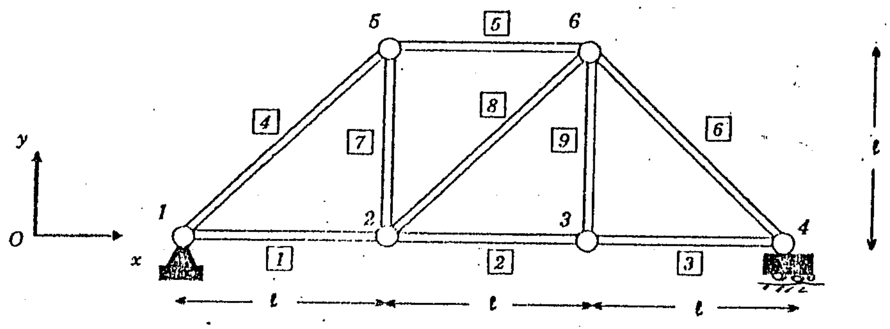


figure 5.3.5
Structure en treillis

r	$\frac{\omega_r}{2\pi}\sqrt{\frac{m\ell}{EA}}$
1	$3.428\ 10^{-2}$
2	$5.810\ 10^{-2}$
3	$8.901\ 10^{-2}$
4	$12.15\ 10^{-2}$
5	$19.47\ 10^{-2}$
6	$23.42\ 10^{-2}$
7	$23.96\ 10^{-2}$
8	$24.67\ 10^{-2}$
9	$33.27\ 10^{-2}$

table 5.3.2
Fréquences propres du treillis de barres calculées par éléments finis

GERADIN
pg. 262

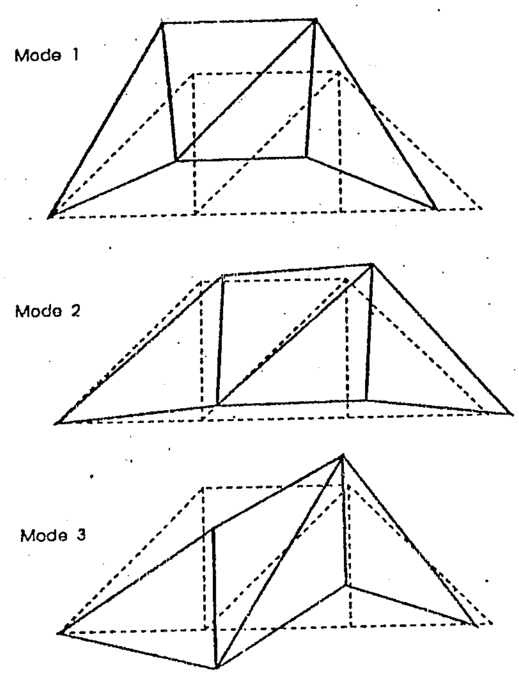


figure 5.3.8
Modes propres du treillis