

4.3) Métodos de Redução e de Sub-Estruturação

• É comum que o interesse reside simplesmente as frequências mais baixas levando o problema a uma dimensão menor (Redução Simples).

• Fracionamento do projeto (avião; asas, fuselagem, etc.); substituição

→ Método de Guyan e Inoue; redução e substituição

→ " de Craig et Bampton; sub-estruturação

Visão Geral

$$M \ddot{u} + K u = F$$

Construa sub-espaço definido pela transformação R ($\dim(R) = m \times m, m < n$) tal que

$$u = R y$$

ou seja

$$M R \ddot{y} + K R y = F$$

premultiplicando por R^T

$$\underbrace{R^T M R}_{\tilde{M}} \ddot{y} + \underbrace{R^T K R}_{\tilde{K}} y = \underbrace{R^T F}_{\tilde{F}}$$

\tilde{K} e \tilde{M} são "matrizes reduzidas" ($m \times m$) e \tilde{F} o vetor de cargas referencial ao novo sistema de coordenadas

Obs: (i) A solução do pb. modificado se aproxima do pb. original medida em que as soluções de \tilde{K} se aproximam das originais

(ii) De uma forma geral os métodos de red. ou sub-estruturação são escolhidos especificamente para \tilde{K}

(iii) A escolha de R contendo os primeiros m -modos (obtidos a partir do cálculo $K\Phi = \omega^2 M\Phi$) pode perder importantes informações, uma vez que ignora as características do carregamento

(iv) O problema acima pode ser minimizado com o uso de uma técnica tipo Wilson

(v) Verificação de adequabilidade do esquema de redução pode ser feita através do resto:

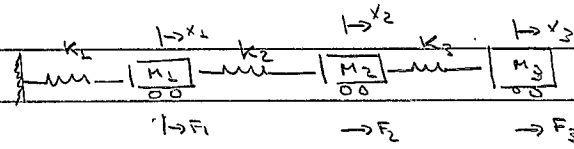
$$r_y(t) = f(t) - M \ddot{u}(t) + K u(t) \quad (\text{"satisfação do equilíbrio dinâmico"})$$

$$\text{onde } u(t) = R y(t)$$

↑
este foi o calculado

(vi) "Condição estática": Como os modos associados à altas frequências tem efeitos inerciais "menores" ($\omega_n k$) é possível imaginar que a resposta do sistema nas "direções" associadas a esses modos é muito próxima de resposta modal estática (pode ser obtida da resposta global estática menos as componentes na direção dos modos de baixa frequência). Obs: desde que a frequência de excitação do modo alto não seja próxima a sua frequência natural

4.3.0) UM PRIMEIRO EXEMPLO



SISTEMA COM 3 GRAUS DE LIBERDADE

Eq. DE MOVIMENTO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_F$$

$$M \ddot{X} + K X = F$$

OBS: (1) FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF)

RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE A $F = \bar{F} e^{j\omega t} (= \bar{F} \{ \cos \omega t + j \sin \omega t \})$

$$X(t) = \bar{X} e^{j\omega t} \quad (V(t) = \omega_j \bar{X} e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow (K - \omega^2 M) \bar{X} = \bar{F}$$

$$\boxed{\bar{X} = H(\omega) \bar{F}} \iff \boxed{D(\omega) \bar{X} = \bar{F}}$$

"MATRIZ DE RIGIDEZ DINÂMICA"

ONDE $H(\omega) = (K - \omega^2 M)^{-1}$

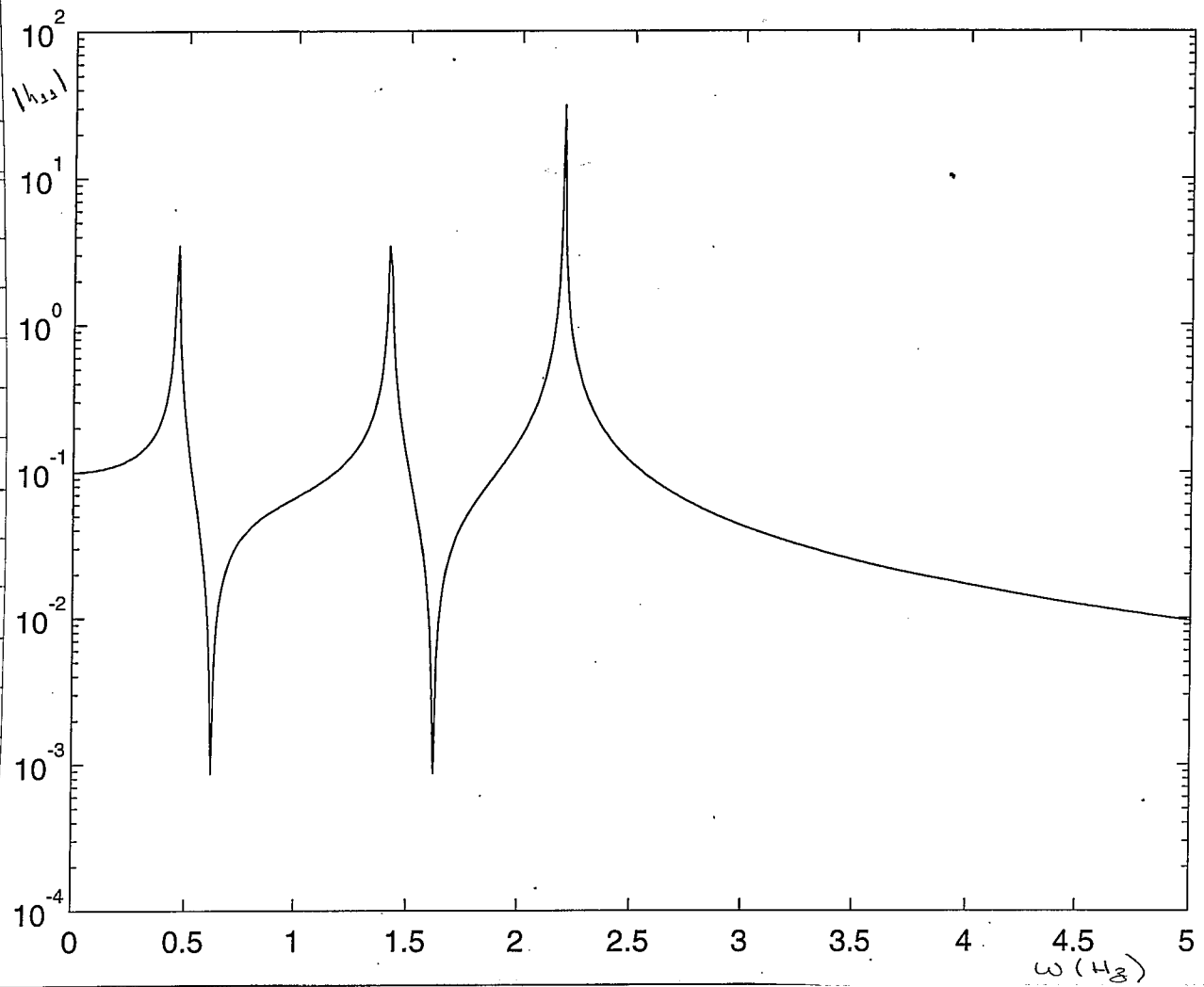
$$Z(\omega) = \omega_j D(\omega)$$

↳ IMPEDÂNCIA

↳ F.R.F

$H(\omega)$... FUNÇÃO COMPLEXA : MÓDULO + FASE

(NO PRESENTE CASO H ... MATRIZ COMPLEXA 3×3)



Por OUTRO LADO

$$(K - \omega^2 M) X_i = 0 \rightarrow \text{"modos"}$$

$$\omega_1 = 0.4568 \text{ Hz} ; \quad \omega_2 = 1.4142 \text{ Hz} ; \quad \omega_3 = 2.1889 \text{ Hz}$$

$$\text{modo 1: } X_1 = (0.32511 ; 0.5897 ; 0.7453)$$

$$\text{modo 2: } X_2 = (0.5774, 0.5774, -0.5774)$$

$$\text{modo 3: } X_3 = (0.9255, -0.3612, 0.0966)$$

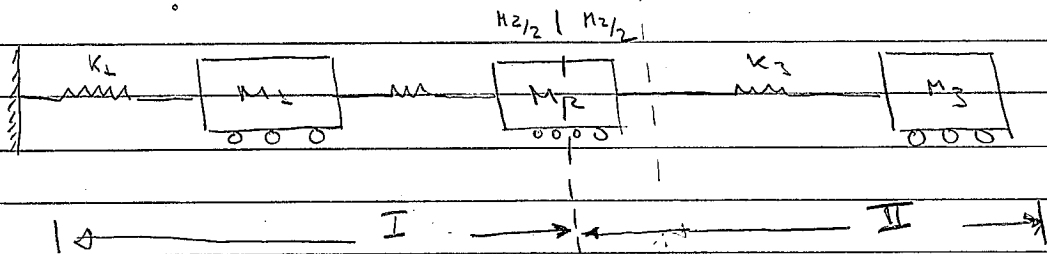
NORMALIZADOS

$$\|X_i\|^2 = 1$$

VALORES ADOPTADOS: $M_1 = 5 \text{ Kg} ; M_2 = 10 \text{ Kg} ; M_3 = 10 \text{ Kg}$

$$K_1 = K_2 = K_3 = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

SUB-ESTRUTURAÇÃO



GRAUS DE LIBERDADE COMPARTILHADOS (GL DE FRONTEIRA) : X_2

• PARA SUB-ESTRUTURA I

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & \frac{M_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{ORIGINAL}}{\overline{F}_2} = F_2 + \overset{\text{AÇÃO DA SUB II EM SUB I}}{\overline{F}_{II \rightarrow I}}$$

• SEMELHANTE \neq SUB-ESTRUTURA II

TRATANDO APENAS DA SUB-ESTRUTURA I

• FREQUÊNCIAS : $\omega_1^I = 0.8740 \text{ Hz}$; $\omega_2^I = 2.2333 \text{ Hz}$
 (0.5257, 0.9507) (0.8507, -0.5257)

→ REDUÇÃO GUYAN IRONS (CONDENSAÇÃO ESTÁTICA) (SUPONDO $F_L = 0$)

HIP: $M_1 \ddot{X}_1 = 0$

$$\therefore \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{k_2}{k_1 + k_2} X_2 \end{aligned} \right.$$

ENTÃO O SISTEMA PASCA A SER REGIDO POR:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_2}{2} \ddot{x}_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 = \tilde{F}_2(t) \end{array} \right\}$$

$$\omega_M^2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{2}{M_2} = 1 \text{ Hz}$$

↓

$$(0.4472, 0.8944)$$

TESTE: VALOR DA FORÇA INERCIAL (CARREGAMENTO $F_2 = \bar{F}_2 e^{j\omega t}$)

$$M_1 \ddot{x}_1 = M_1 (-\omega^2) \left(\begin{array}{cc} k_1 k_2 & -\omega^2 M_2 \\ k_1 + k_2 & \frac{2}{2} \end{array} \right)^{-1} \bar{F}_2 \frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{M_2}{2} \ddot{x}_2 = \frac{M_2}{2} (-\omega^2) \left(\begin{array}{cc} k_1 k_2 & -\omega^2 M_2 \\ k_1 + k_2 & \frac{2}{2} \end{array} \right)^{-1} \bar{F}_2$$

$$r = \frac{\|M_1 \ddot{x}_1\|}{\|M_2 \ddot{x}_2\|} = 2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

OBS: (I) $k_2 \uparrow$ $r = 2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ ($x_1 \sim x_2$)

ENTÃO $r \downarrow 0$ $M_2 \gg M_1$

(II) $k_1 \uparrow$ $x_1 \downarrow 0$

VOLTANDO A SUB-ESTRUTURA II

$$\begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 2 & \end{bmatrix} \ddot{X}_2 + \begin{bmatrix} k_2 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

⇓

$$D^{II}(\omega) \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \end{bmatrix}$$

$$D^{II}(\omega) = \begin{bmatrix} -k_3 - \omega^2 M_2 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 - \omega^2 M_3 \end{bmatrix}$$

VOLTANDO A ESTRUTURA TOTAL

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} D^{II}(\omega) + k_3 - \omega^2 M_2 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 - \omega^2 M_3 \end{bmatrix}$$

$$D(\omega) \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \end{bmatrix}$$

Com $\bar{X}_3 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega^2 M_1} \bar{X}_2$

Obs: É POSSÍVEL AGORA OBTEN UM SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

• COMENTAR: CONTROLE SUPER-ELEMENTO

→ "REDUÇÃO EXATA" (CARREGAMENTO HARMÔNICO)

$$D(\omega) \bar{X} = \bar{F} \quad \left(\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$X_1 = -\frac{D_{12}(\omega)}{D_{11}(\omega)} X_2 = -\frac{-k_2}{k_1+k_2-\omega^2 M_1} X_2 = \frac{k_2}{k_1+k_2-\omega^2 M_1} X_2$$

DIF.

$$\therefore \frac{D_{11}(\omega) D_{22}(\omega) - D_{12}(\omega) D_{21}(\omega)}{D_{11}(\omega)} \bar{X}_2 = \bar{F}_2 \quad (*)$$

PARA OS VALORES ADOTADOS:

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} 20 - 5\omega^2 & -10 \\ -10 & 10 - 5\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo: } \frac{(20 - 5\omega^2)(10 - 5\omega^2) - 100}{(20 - 5\omega^2)} \bar{X}_2 = \bar{F}_2$$

$$\frac{100 - 150\omega^2 + 25\omega^4}{20 - 5\omega^2} \bar{X}_2 = \bar{F}_2$$

$$\text{Polos: } 100 - 150\omega^2 + 25\omega^4 = 0$$

$$4 - 6\omega^2 + \omega^4 = 0$$

$$\text{FAZENDO } y = \omega^2 \rightarrow y^2 - 6y + 4 = 0 \quad \therefore y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} \begin{cases} \frac{6 + \sqrt{20}}{2} \\ \frac{6 - \sqrt{20}}{2} \end{cases}$$

CORRESPONDENDO A ω_1^2, ω_2^2

OBS REESCREVENDO (*)

$$\left[\underbrace{\left(k_{22} - \omega^2 \frac{M_2}{2} \right)}_{D_2(\omega)} - k_{21} \left(k_{11} - \omega^2 M_1 \right)^{-1} k_{12} \right] \bar{X}_2 = \bar{F}_2$$

OU

$$\frac{D(\omega)}{2} = k_{22} - \omega^2 \frac{M_2}{2} - k_{12} \left(k_{11}^{-1} + \frac{\omega^2}{M_1} \quad \frac{1}{\frac{k_{11}}{M_1} \left(\frac{k_{11}}{M_1} - \omega^2 \right)} \right) k_{21}$$

$$= \underbrace{k_{22} - k_{12} k_{11}^{-1} k_{12}}_{\text{"RESPOSTA ESTÁTICA"}} - \omega^2 \frac{M_2}{2} + \omega^2 k_{12} \left(\frac{\omega}{\omega_1^2} \right) \frac{1}{M_1} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2)} k_{21}$$

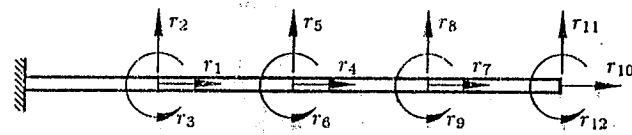
SISTEMA CONDENSADO

$$X_2 = 0$$

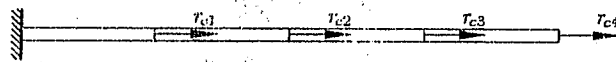
"INSPIRAÇÃO GRAVE - DAMPTON"

4.3.1) Método de Guyan e Irons - Redução

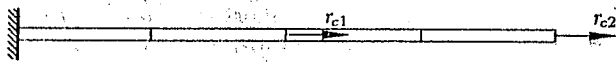
exemplo:



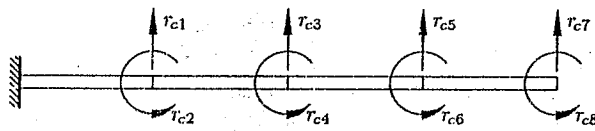
(a) discretisation: 12 degrees of freedom



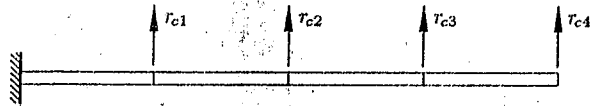
(b) exact model for longitudinal oscillations: 4 degrees of freedom



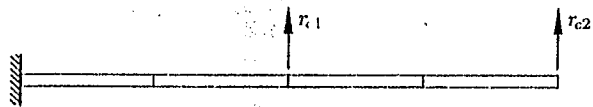
(c) approximate model for longitudinal oscillations: 2 degrees of freedom



(d) exact model for bending oscillations: 8 degrees of freedom



(e) approximate model for bending oscillations: 4 degrees of freedom



(f) rough model for bending oscillations: 2 degrees of freedom

Eg. Básica: $M \ddot{u} + K u = F(t)$ (\ddot{u} em u)

Criando $\begin{cases} u_p = \text{graus de liberdade "secundários" (a serem eliminados)} \\ u_c = \text{" " " " "primários" (" " mantidos)} \end{cases}$

Os graus de liberdade "secundários" serão escolhidos como aqueles que não possuem "forças" a eles associados

Assim a equação acima pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cp} \\ K_{pc} & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ u_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cp} \\ M_{pc} & M_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_p \end{bmatrix}$$

Considerando $M_{pp} \approx 0$; $M_{pc} = M_{cp}^T \approx 0 \rightarrow$ podemos eliminar u_p como grau de liberdade

Obs: O sistema acima é inspirado pela condensação estática!

Logo $\left\{ u_p(t) = -K_{pp}^{-1} K_{pc} u_c(t) \right\}$... relação entre os dois grupos de graus de liberdade

ou, ainda,

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ u_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{pp}^{-1} K_{pc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -K_{pp}^{-1} K_{pc} \end{bmatrix}}_{T_c} u_c(t) = [T_c]_{m \times n_c} u_c(t)$$

Substituindo a expressão acima no pb. de autovalor

$$[\omega^2 M T_c - K T_c] u_c = 0$$

ou, ainda

$$\underbrace{[\omega^2 T_c^T M T_c - T_c^T K T_c]}_{[M]_{n_c \times n_c}} u_c = 0$$

"matriz reduzida"

"Recita de Bolo"

- i. Determine the number of eigenvalues and eigenvectors required, say n_{modes} .
- ii. Retain a multiple of n_{modes} degrees of freedom (e.g., $5 \times n_{\text{modes}}$ degrees of freedom).
- iii. The degrees of freedom to be retained are identified by calculating the ratios of diagonal elements in M and K , namely, K_{pp}/M_{pp} , $1 \leq p \leq n_{\text{eq}}$. The degrees of freedom with the smallest ratios are retained (i.e., they are the degrees of freedom in ψ_1 ; [7]).

Obs.: (i) A matriz reduzida \bar{K} é também expressa por: $\bar{K} = K_{cc} - K_{cf} K_{ff}^{-1} K_{fc}$
→ "MATRIZ CHEIA" ←

(ii) Por sua vez $\bar{M} = M_{cc} - M_{cf} K_{cc}^{-1} K_{cc} - K_{cf} K_{cc}^{-1} (M_{cc} - M_{cf} K_{cc}^{-1} K_{cc})$

que é bastante custosa computacionalmente!

(iii) Conclusões: ver Geradin, "Curso de primeira ordem"

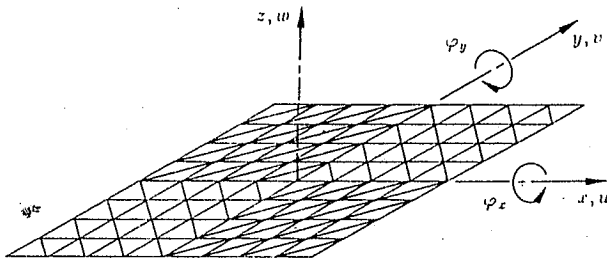
Exemplo veja ps. 146 Anguiss

Exemplo: Placa Simplesmente apoiada

geometry and idealisation (simply supported quadratic plate)

5 degrees of freedom at a node: $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$

TRIB3 plate elements



data: length of side $l = 1 \text{ m}$
 thickness $t = 0.01 \text{ m}$
 Young's modulus $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
 Poisson's ratio $\nu = 0.3$
 density $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}^4$

calculation A: non condensed
 $81 \times 5 = 405$ degrees of freedom
 6 rigid body modes

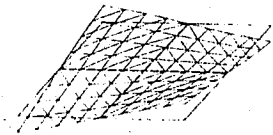
calculation B: condensed to 81 w degrees of freedom
 + u, v in center
 + v or u at a corner
 = 84 primary degrees of freedom
 6 rigid body modes of condensed system

order of bending modes	analytical solution [17.18]	calculation A* 405 degrees of freedom [17.1]		calculation B* 84 primary degrees of freedom [17.1]		
		ν_1 [Hz]	$e_D = e_t$ [%]	ν_1 [Hz]	e_c [%]	e_t [%]
1	33.0395	33.1918	0.46	33.1933	0.0045	0.47
2	48.0557	48.1084	0.11	48.1121	0.0077	0.12
3	59.5182	60.1039	0.98	60.1111	0.0120	1.00
4	85.3432	86.7211	1.61	86.7477	0.0307	1.65
5	85.3432	86.7211	1.61	86.7477	0.0307	1.65
6	149.2800	152.9380	2.08	135.0560	0.0772	2.16
7	149.2800	152.9380	2.08	135.0560	0.0772	2.16
8	156.1800	160.7583	2.93	160.9150	0.0975	3.03
9	170.4410	174.8724	2.60	175.1220	0.1427	2.75
10	190.2740	193.9359	1.92	194.1900	0.1310	2.06

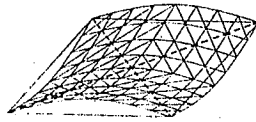
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{frequency})$$

e_D, e_c, e_t are defined in fig. 4.4.3

* identical results are obtained if the u, v degrees of freedom are suppressed, yielding 243 or 81 degrees of freedom



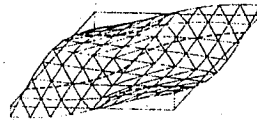
$\nu_1 = 33.2\text{Hz}$



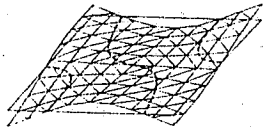
$\nu_2 = 48.1\text{Hz}$



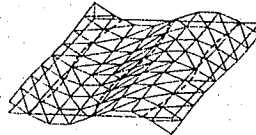
$\nu_3 = 60.1\text{Hz}$



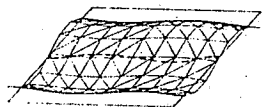
$\nu_4 = 86.7\text{Hz}$



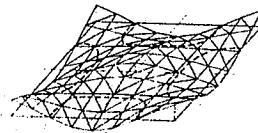
$\nu_5 = 86.7\text{Hz}$



$\nu_6 = 153.0\text{Hz}$



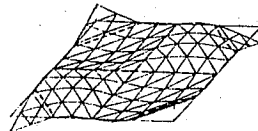
$\nu_7 = 153.0\text{Hz}$



$\nu_8 = 160.9\text{Hz}$



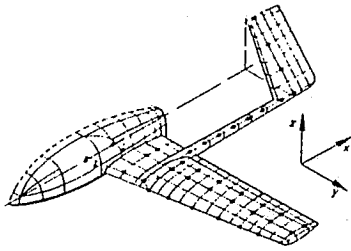
$\nu_9 = 175.1\text{Hz}$



$\nu_{10} = 194.2\text{Hz}$

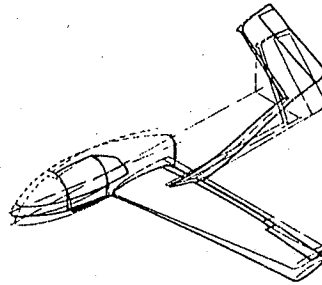
Exemple : Fuselage

(a) idealisation of the FS 28



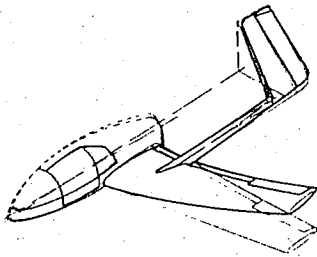
5515 degrees of freedom (sym.)
of which 102 primary
• nodes with primary degrees of freedom

(b) 1st symmetrical eigenmode



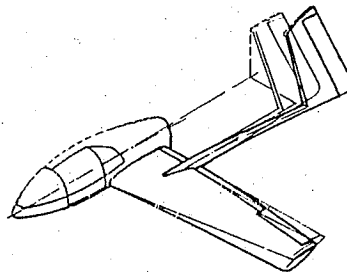
calculation: $\nu_{1,s} = 9.23$ Hz
measurement: $\nu_{1,s} = 9.15$ Hz
error: 0.87 %

(c) 2nd symmetrical eigenmode



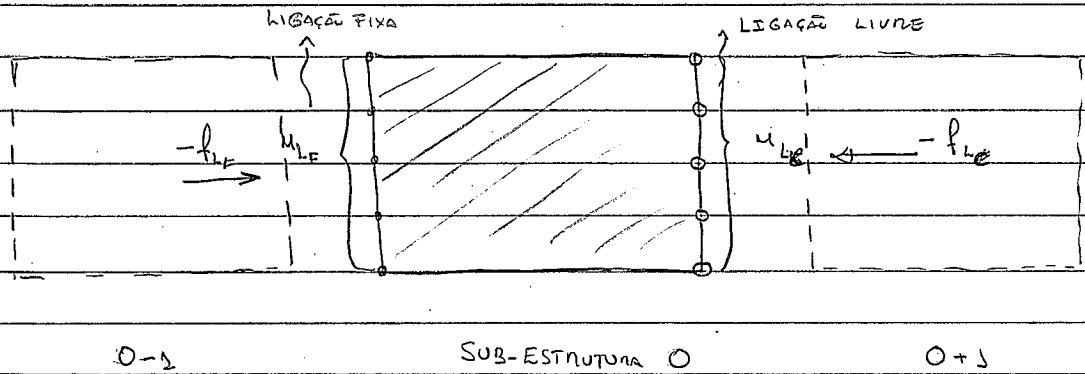
calculation: $\nu_{2,s} = 10.78$ Hz
measurement: $\nu_{2,s} = 11.10$ Hz
error: -2.88 %

(d) 3rd symmetrical eigenmode



calculation: $\nu_{3,s} = 20.20$ Hz
measurement: $\nu_{3,s} = 19.60$ Hz
error: 3.06 %

4.3.2) MÉTODOS DE SUB-ESTRUTURAÇÃO



$$M \ddot{u} + K u = F \quad \text{--- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO}$$

PI SUB-ESTRUTURA 0 (N GRAUS DE LIBERDADE)

$$\bar{M} \ddot{u}_0 + \bar{K} u_0 = \bar{F} - P_F^T f_{LF} - P_L^T f_{LE}$$

ONDE $M_{LF} = P_F u_{0j}$ $M_{LA} = P_A u_0$

COM $[P_F]_{N \times N_F}$ $[P_L]_{N \times N_L} = I_{N \times N}$ E ASSIM POR DIANTE

SENDO $[P_0]_{N \times N}$ A MATRIZ QUE DETERMINA A TRANSFERÊNCIA AOS GRAUS DE LIBERDADE DA SUB-ESTRUTURA 0 (ENTÃO P_F E P_L ESTARIAM INCLuíDAS COMO BLOCOS) PODE-SE

REESCREVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES

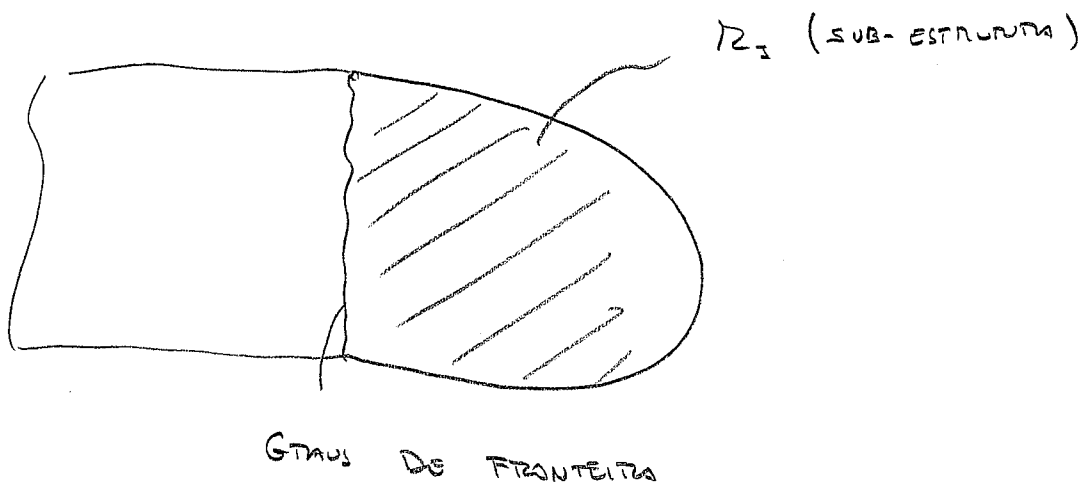
$$\begin{aligned} \bar{M} &= P_0 M P_0^T \\ \bar{K} &= P_0 K P_0^T \\ \bar{F} &= P_0 F \end{aligned}$$

PS: COMO OBTER f_{LF} E f_{LE} FORÇAS DE ITENAÇÃO?

(*) IMPEDÂNCIA MECÂNICA E O MÉTODO DE CRAIG-BAMPTON

$$Z(\omega^2) \underline{u} = \underline{F}$$

ONDE $Z(\omega^2) = K - \omega^2 M$



$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_F \\ \underline{z}_{II} \\ \underline{u}_F \end{bmatrix}$$

Logo $\underline{u}_I = -Z_{II}^{-1} Z_{IF} \underline{u}_F$ — CONDENSACÃO NO CASO EM QUE NÃO HÁ FORÇAS EXTERNAS ASSOCIADAS AOS \underline{u}_I

⇓

$$Z_{FF}^*(\omega^2) \underline{u}_F = \underline{F}$$

ONDE $Z_{FF}^* = Z_{FF} - Z_{FI} Z_{II}^{-1} Z_{IF}$ → MODOS DE SUB-ENGAJAMENTO

POLOS: $Z_{II} \rightarrow \det(Z_{II}) = 0 \rightarrow \det(K_{FI} - \omega^2 M_{II}) = 0$

→ DESENVOLVIMENTO ESPECTRAL DA MATRIZ DE IMPEDÂNCIA ↔ "MODOS" ESTÁTICOS DE FRONTEIRA + "MODOS" DE VIBRAÇÃO DE FRONTEIRA ENCASTADA

OBS.: (i) M_F --- MODOS ESTÁTICOS
 M_I --- " DE VIBRAÇÃO } $M_I + M_F = M$

$$\underline{M}^{SUB} = R \begin{bmatrix} M_F \\ \underline{y} \end{bmatrix} \rightarrow \text{"AMPLITUDES MODAIS"}$$

ONDE $R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{II}^{-1} K_{IF} & \underline{0} \end{bmatrix}$

↳ MATRIZ DE MODOS DE VIBRAÇÃO ENCASTADA ("POSSÍVEL REDUÇÃO")

OBS: TOMANDO UM NÚMERO DE MODOS $< M_I$

PARA SUB-ESTRUTURA:

$$K^{RED} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{FF} & 0 \\ 0 & R_m^2 \end{bmatrix} \quad C$$

$$M^{RED} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{FF} & M_{FM} \\ M_{MF} & I \end{bmatrix}$$

ONDE:

$$\bar{K}_{FF} = K_{FF} - K_{FS} K_{II}^{-1} K_{IF}$$

$$\bar{M}_{FF} = M_{FF} - M_{FI} K_{II}^{-1} K_{IF} - K_{FS} K_{II}^{-1} M_{IF} + K_{IFS} K_{II}^{-1} M_{IE} K_{IE}^{-1} K_{IF}$$

$$M_{MF} = \Phi_M^T (M_{IF} - M_{IE} K_{II}^{-1} K_{IF}) = M_{FM}^T$$

PERGUNTA: EXISTÊNCIA DE K_{II}^{-1} ?

OBS. 1 → OUTROS MÉTODOS DE SUB-ESTRUTURAS

→ PQ. CROSS-RAMPION PODERIA NÃO FUNCIONAR

→ "ASSIGNED MODES" (MODOS GEOMÉTRICOS)

→ MONTAGEM COM O SISTEMA GLOBAL

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ | \\ M_F \\ | \\ M_2 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} U \\ | \\ M_F \\ | \\ M_2 \end{bmatrix}$$

→ CARACTERIZAÇÃO DA SUB-ESTRUTURA I VIA EXPERIMENTOS

4.2.2.1) MÉTODO DE GUYAN

→ S_2 CONSTITUI UMA REPRESENTAÇÃO DE S

• MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA

DADO Φ_i UM MODO DE FRAGMENTO LIVRE DE R_2 :

$$u = \begin{bmatrix} \Phi_i^s \\ u_p(R_2) \\ \Phi_i \end{bmatrix}$$

$$\text{ENTÃO } K_{ij} = \underbrace{\int_{R_1} \nabla(\Phi_i^s) \cdot \varepsilon(\Phi_j^s) dR_1}_{K_{E11}} + \underbrace{\int_{R_2} \nabla(\Phi_i) \cdot \varepsilon(\Phi_j) dR_2}_{K_{E22}}$$

$$\underbrace{\int_{R_1} \rho(\Phi_i^s) \cdot u_p(\Phi_j^s)}_{\substack{\downarrow \\ \text{DEMONSTRAR}}} \quad K_{E12}$$

$$M_{ij} = \underbrace{\int_{R_1} \rho \Phi_i^s \cdot \Phi_j^s}_{M_{E11}} + \underbrace{\int_{R_2} \rho \Phi_i \cdot \Phi_j}_{M_{E22}}$$

OBS: (i) AS PRIMEIRAS PARCELAS REPRESENTAM "AS CONTRIBUIÇÕES" DA SUB-ESTRUTURA 1 NA RESPOSTA DO SISTEMA

(ii) AS MATRIZES K_{E11} , M_{E11} SÃO DIAGONAIS JÁ QUE Φ_i SÃO MODOS. NO ENTANTO K & M NÃO O SÃO NECESSARIAMENTE.

POR OUTRO LADO:

$$\int_{\Omega} \sigma(v_i^s) \cdot \varepsilon(\phi_\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\phi_\alpha) \cdot \varepsilon(v_i^s) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{PARTE DA} \\ \text{MATRIZ} \end{array} \begin{array}{l} \hat{K} \\ \\ 0 \end{array} \right)$$

DEM:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \sigma(v_i^s) = 0 \\ \sigma_M = F \quad x \in \Gamma \\ v_i^s = v_\Gamma^i \quad x \in \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{DEFINIÇÃO DE } v_i^s)$$

ENTÃO

$$\int_{\Omega} \text{div } \sigma(v_i^s) \cdot \phi_\alpha = - \int_{\Omega} \sigma(v_i^s) \cdot \varepsilon(\phi_\alpha) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(v_i^s) \cdot n(\phi_\alpha) = 0$$

MODO DINÂMICO

DE FRONTEIRA

$$\left. \begin{array}{l} \text{FIXA } u(\phi_\alpha)|_{\Gamma} = 0 \\ u(\phi_\alpha)|_{\partial\Omega - \Gamma} = 0 \end{array} \right\}$$

DA MESMA FORMA: (PROBLEMA BÁSICO DOS MODOS DINÂMICOS DE FRONTEIRA FIXA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \sigma(\phi_\alpha) + \rho \omega_\alpha^2 \phi_\alpha = 0 \\ \sigma_M = 0 \quad \partial\Omega - \Gamma \\ \phi_\alpha = 0 \quad \Gamma \end{array} \right.$$

ENTÃO (JÁ INTEGRANDO POR PARTES)

$$\int_{\Gamma} R_\alpha \cdot v_i^s - \int_{\Omega} \sigma(\phi_\alpha) \cdot \varepsilon(v_i^s) + \omega_\alpha^2 \int_{\Omega} \phi_\alpha \cdot v_i^s = 0$$

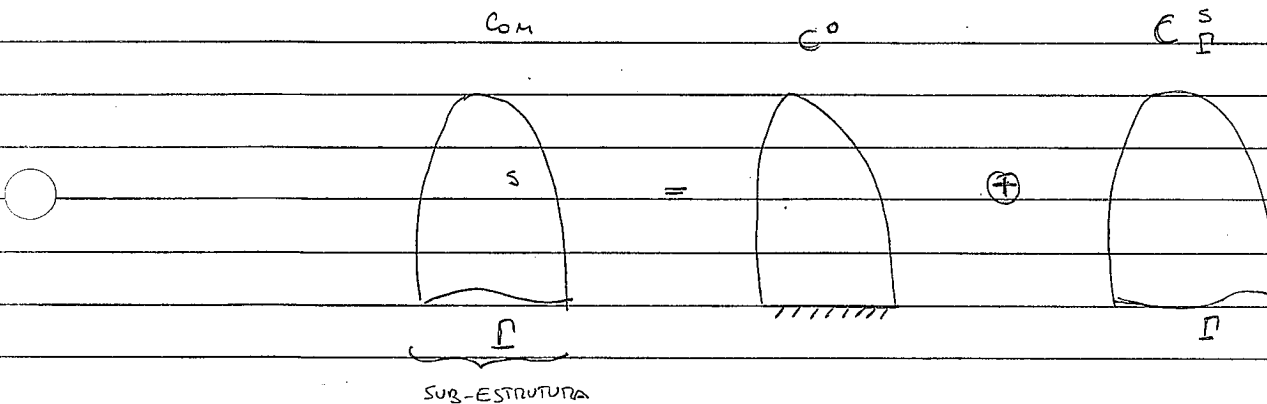
FORÇAS DE REACÃO RESULTADO ANTERIOR

OBS: VÁRIOS MÉTODOS SÃO UTILIZADOS NO SENTIDO DE MELHORAR A APROXIMAÇÃO FORNECIDA

PELO MÉTODO REDUZIDO, EM PARTICULAR A ADIÇÃO DE "MODOS ESTÁTICOS" (MOTIVADOS PELO FATO QUE PARA OS MODOS DE MAIS ALTA ORDEM O SISTEMA TENDE A SE COMPORTAR DE FORMA ESTÁTICA, EX: 1 GL $\bar{X} = \frac{\bar{F}}{M(\omega_H^2 - \omega^2)}$)

SE $\omega \ll \omega_H \rightarrow \bar{X} \approx \frac{\bar{F}}{M \omega_M^2} = \frac{\bar{F}}{K}$ (RESPOSTA ESTÁTICA), OU SEJA,

FORMA USUAL: $u = u^s(u_p) + R y$ ↳ MODOS DINÂMICOS DE FRONTEIRA FIXA



ENTÃO O PROBLEMA SERIA DESCRITO POR: $u^s(u_p), y, R$

SENDO $u^s(u_p)$ O CAMPO DE DESLOCAMENTOS OBTIDO PELA IMPOSIÇÃO DO DESLOCAMENTO DE FRONTEIRA u_p , CONSIDERANDO-SE APENAS A RESPOSTA ESTÁTICA,

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IF} \\ K_{FI} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_F \end{bmatrix} \rightarrow \text{REAÇÃO DE APOIO}$$

$$u_I = -K_{II}^{-1} K_{IF} u_p$$

$$F_F = K_{FI} u_I + K_{FF} u_p$$

ANALISANDO O SUB-SISTEMA

$$\begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PI} \\ K_{IP} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_P \\ M_I \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{IP} & M_{II} \\ M_{IP} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{IP} & K_{II} \end{bmatrix}}_{K_S}$

(1) MODOS ESTÁTICOS DE FRONTEIRA

$$K_S u = 0 \implies M_I = -K_{II}^{-1} K_{IP} u_P$$

(2) MODOS DE VIBRAÇÃO DE FRONTEIRA FIXA ($M_P = 0$)

$$K_{II} M_I = \omega^2 M_{II} M_I$$

\Downarrow
 Φ_i

Logo $R^A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{II}^{-1} K_{IP} & \Phi \end{bmatrix}$

OBS: (1) O MODELO PODE SER REDUZIDO NA MEDIDA EM QUE SE ESCOLHAM APENAS ALGUNS MODOS DE VIBRAÇÃO. NO ENTANTO, NO SENTIDO DE MANTER COMPATIBILIDADE NA FRONTEIRA, TODOS OS MODOS ESTÁTICOS DEVERÃO SER PRESERVADOS

• PARA A ESTRUTURA TODA

$$R = \begin{bmatrix} \Phi^1 & | & -K_{II}^{-1} K_{IP} & | & 0 \\ 0 & | & I_d & | & 0 \\ \hline 0 & | & -K_{II}^{-1} K_{IP} & | & \Phi^2 \end{bmatrix}$$

• As COLUNAS DA MATRIZ $-K_{II}^{-1} K_{IF}$ SÃO OS CHAMADOS "MODOS ESTÁTICOS DE FRONTEIRA".

• A PARTIR DA FORMA DA O CAMPO DE DESLOCAMENTOS u INTRODUZIDA ACIMA, DESENVOLVE-SE A SEGUINTE FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE VIBRAÇÕES

$$u^s = \sum_{i=1}^{NGLF} U_i v_i^s$$

ONDE v_i^s SÃO ELEMENTOS DE UMA BASE PARA OS MODOS DE FRONTEIRA

OBS: FORMULAÇÃO VARIACIONAL (PB. HARMÔNICO) EUTÃO

$$\int_{\Omega} (\sigma(u) \epsilon(v) dx - \omega^2) \rho u \cdot v dx = \int_{\Gamma} F \cdot v d\Omega \quad K u$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K^{SI} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & & \omega_x^2 M_x & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ \vdots \\ y \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{U}} - \omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} M^{SI} & C_x \\ \vdots & \\ C_x^T & M_x \\ \vdots & \end{bmatrix}}_{\hat{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_F \\ \vdots \\ \hat{u} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{U}_F} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{F}_z}$$

ONDE $K^S \leftrightarrow \int_{\Omega} \sigma(u^s) \epsilon(u^s) dx$, $M^S \leftrightarrow \int_{\Omega} \rho u^s(u_p) u^s(u_p) dx$

E C É UMA MATRIZ $NGLF \times N$
 ↓
 NÚMERO DE MODOS RETIDOS

EM QUE CADA ELEMENTO É DADO POR:

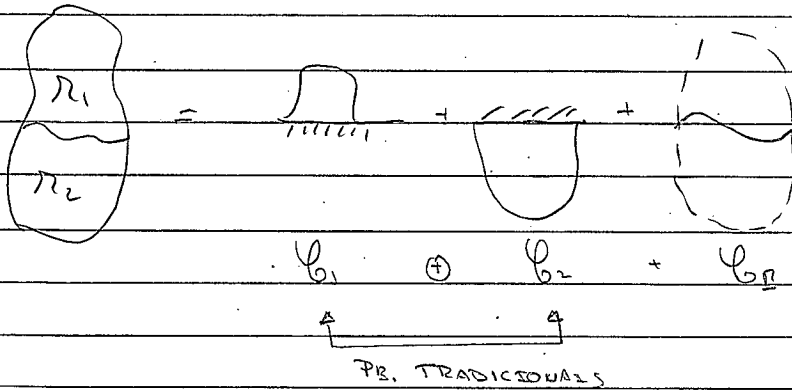
$$[C]_{i\alpha} = \int_{\Omega} \rho v_i^s \cdot \underbrace{\Phi_{\alpha}}_{\text{modo}} dx$$

$$[C]_{i\alpha} = [C]_{\alpha i}$$

4.3.2.2) MÉTODO DE CRAIG-RAMPON

$$\begin{matrix} \dots \\ \mu \\ \dots \end{matrix} = \begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_D \\ \mu_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_1^S(\mu_D) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_2 - \mu_2^S(\mu_D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1^S(\mu_D) \\ \mu_D \\ \mu_2^S(\mu_D) \end{bmatrix}$$

OU NA FORMA DE DIAGRAMA



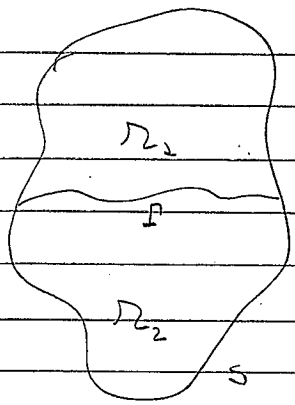
(*) IMPEDÂNCIA

OBS: PARA CADA SUB-ESTRUTURA AS "FORMAS GEOMÉTRICAS" A SEREM ASSUMIDAS SÃO DESCRITAS PELOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE FRONTEIRA FIXA E PELOS MODOS ESTÁTICOS DE FRONTEIRA.

SUB-ESTRUTURAÇÃO → MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_D \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_D \\ \phi_2 \end{bmatrix}}_g$$

OUTRAS ALTERNATIVAS



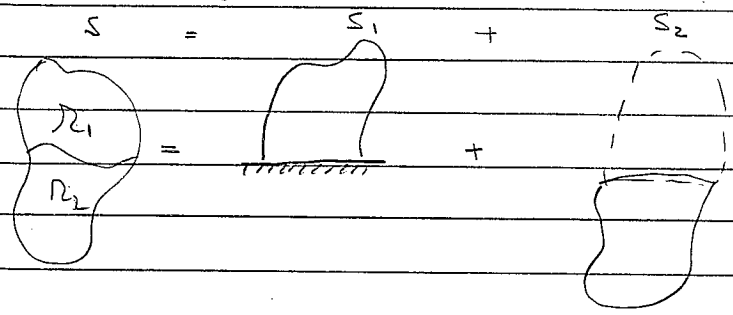
$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_I \\ u_2 \end{bmatrix}$$

UMA PRIMEIRA DECOMPOSIÇÃO

$$u = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 - u_1^s(u_I) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u^s} + \begin{bmatrix} u_1^s(u_I) \\ u_I \\ u_2 \end{bmatrix}$$

MAIS UMA VEZ, $u_1^s(u_I)$ É A RESPOSTA ESTÁTICA DA SUB-ESTRUTURA 1 À IMPOSIÇÃO DE u_I NA FRONTEIRA DAS 2 SUB-ESTRUTURAS

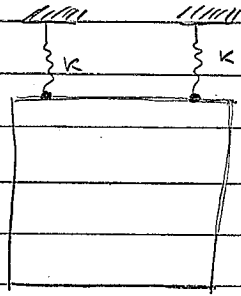
REPRESENTANDO GRAFICAMENTE



$$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$$

EXEMPLO: INFLUÊNCIA DE UMA SUSPENSÃO ELÁSTICA NOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE

FRONTEIRA LIVRE DE UMA ESTRUTURA



VIBRAÇÃO TRANSVERSAL