

## 4) ANÁLISE MODAL

### 4.1) VIBRAÇÕES LIVRES EM SISTEMAS SEM AMORTECIMENTO

matriz de rigidez (simétrica e semidefinida positiva)

Semidiscretização:  $M \ddot{u} + K u = 0$  (1)

$\downarrow$   
 matriz de massa  $\rightarrow$  valores modais  
 (simétrica e semidefinida positiva)

Sol.:  $u = \Phi e^{p t}$  e  $\ddot{u} = \Phi p^2 e^{p t}$

("típica")  $\downarrow$  "frequência de oscilação"

$\downarrow$   
vetor n posições

Substituindo em (1)

$$[p^2 M + K] \Phi = 0 \quad (\text{pb. de autovalor generalizado}) \quad (2)$$

$\Phi = 0$  (sol. trivial)  $\rightarrow$  sistema em repouso

Outras soluções:  $\det(p^2 M + K) = 0$

$\begin{vmatrix} p^2 m_{11} + k_{11} & p^2 m_{12} + k_{12} & + \dots \\ & p^2 m_{22} + k_{22} & \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$	= 0
Sim	

$\therefore b_n (p^2)^n + b_{n-1} (p^2)^{n-1} + \dots + b_0 = 0$  (equação característica) (3)

$\therefore b_n = \det [M]$  e  $b_0 = \det [K]$

Obs: Se  $\det [K] = 0 \rightarrow b_0 = 0$  admitindo  $[p^2] = 0$  ... presença de modos rígidos

$\downarrow$   
i-ésima raiz

Desta forma

$$u_e = \sum_{i=1}^{m_e} a_i \sin(\omega_i t + \psi_i) \Phi_i$$

é solução de (8) que substituída em (7) e integrando-se 2 vezes resulta em:

$$u_0 = -M_{00}^{-1} M_{0e} u_e + A_0 + b_0 t$$

Logo a resposta total é dada por

$$u = \underbrace{[T_e - T_0 M_{00}^{-1} M_{0e}] \sum_{i=1}^{m_e} a_i \sin(\omega_i t + \psi_i) \Phi_i}_{\text{PARTE OSCILATÓRIA}} + \underbrace{T_0 [A_0 + b_0 t]}_{\text{VELOCIDADE CONSTANTE}}$$

Obs: (i) Se  $u(0) = 0$  e  $\dot{u}(0) = 0$

$$\rightarrow a_0 = b_0 = 0$$

(ii) Ver exemplo na próxima página

•  $M$  ---- singular ( $M \Phi_p = 0$      $\Phi_p = 0$ )

Voltando a equação característica

$$\frac{d}{dt} M + b_{m-1} d + \dots + b_0 d^m = 0$$

$$\text{onde } d = \frac{1}{\omega^2}$$

$d = 0$  é uma raiz, ou, por outro lado  $\omega^2 = \infty$

Obs: É possível continuar a análise de autovalores e autovetores com essa anomalia! Porém é possível também fazer uma exclusão desse modo (ver Argym's)

Supondo  $M$  e  $K$  definidos-positivos (3) admite  $n$  não-nulas raízes  $p^2$ .  
 Cada uma destas gerando  $\pm\sqrt{p^2}$  e, portanto,  $2n$  soluções  $\Phi$

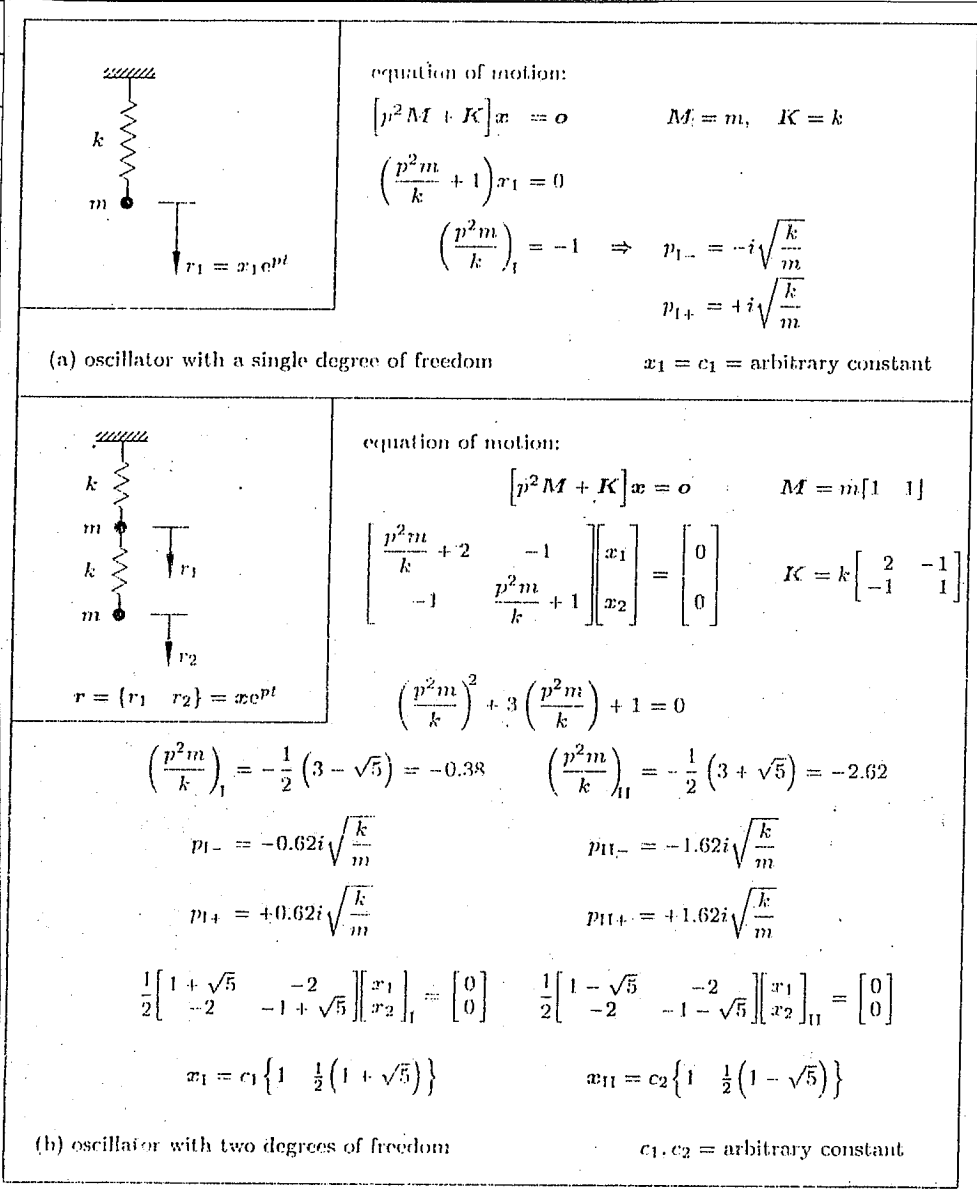


Fig. 4.1.1 Spring-mass oscillator: the  $p_i^2$  solutions of the characteristic equations are negative real, the pairs of  $p_i$  solutions are purely imaginary. The corresponding solution vectors  $x_i$  are real and determinable but for an arbitrary (complex or real) constant  $c_i$

Nos exemplos acima os autovalores (frequências) são negativos e os autovetores são reais. (pb. de oscilação livre). Estes resultados não são simples coincidências, aplicando-se portanto a um sistema com  $n$  graus de liberdade:

Dem:

Seja  $\bar{\Phi}_i = a_i + b_i i$ . Substituindo-o em (2) e multiplicando-se o resultado pelo conjugado ( $\bar{\Phi}_i^* = a_i - b_i i$ ), temos:

$$P_i^2 \bar{\Phi}_i^* M \bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_i^* K \bar{\Phi}_i = 0$$

ou, ainda, olhando mais detalhadamente

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Phi}_i^* K \bar{\Phi}_i \\ \bar{\Phi}_i^* M \bar{\Phi}_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_i K a_i + b_i K b_i - i(b_i K a_i - a_i K b_i) \\ \omega^2 (a_i M a_i + b_i M b_i - i(b_i M a_i - a_i M b_i)) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (K \text{ simétrico}) \\ (M \text{ simétrico}) \end{array}$$

ou, seja  $\bar{\Phi}_i^* K \bar{\Phi}_i$  e  $\bar{\Phi}_i^* M \bar{\Phi}_i$  são reais

Admitindo que  $K$  e  $M$  são positivos definitos as quantidades acima são reais positivos e portanto

$$P_i^2 = - \frac{\bar{\Phi}_i^* K \bar{\Phi}_i}{\bar{\Phi}_i^* M \bar{\Phi}_i} \leq 0$$

Admitindo que  $\omega_i^2$  é uma raiz simples (3) pode ser escrita na forma:

$$(P^2 - P_1^2)(P^2 - P_2^2) \dots (P^2 - P_j^2) = 0$$

portanto:

$$(4) \quad [P_i^2 M + K] \bar{\Phi}_i = 0 \quad \text{se } \bar{\Phi}_i \text{ é solução o } \bar{\Phi}_i \text{ também é}$$

podemos então escrever uma normalização [ $\bar{\Phi}_i = 1$ ]. Logo (4) possui uma linha supérflua, ou seja, uma linha eliminada e uma coluna pode ser passada para direita, gerando um sistema não-homogêneo de determinante não-nulo (as  $m-1$  equações restantes são independentes) logo de solução real e única.

↗

Assim: 
$$u = \sum_{i=1}^M (c_i e^{-i\omega_i t} + d_i e^{+i\omega_i t}) \quad (P_{i-} = -i\omega_i \text{ e } P_{i+} = i\omega_i, \quad p^2 = -\omega^2)$$

ou, ainda,

$$u(t) = \sum_{i=1}^M (a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)) \Phi_i \quad (5)$$

com  $2M$  incógnitas  $a_i$  e  $\varphi_i$  a serem determinadas através de condições iniciais

Obs.: Eq. (5) caracteriza o sistema como uma superposição de  $M$  "oscilações" com frequência angular  $\omega_i$  cada que serão chamadas, então  $\Phi_i$  como modos naturais. A forma geométrica dos modos é dada por  $\Phi_i$ .

Definiremos, também: o período por

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

Obviamente de (5)

$$\ddot{u} = \sum_{i=1}^M a_i \omega_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \Phi_i, \quad \dot{u} = \sum_{i=1}^M a_i \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \varphi_i - \pi) \Phi_i$$

Obs.: Os modos a serem excitados só dependem das condições iniciais

Sejam  $\Phi_i = \Phi_j$  dois autovetores de (2), ou seja,

$$\omega_i^2 M \Phi_i = K \Phi_i$$

$$\omega_j^2 M \Phi_j = K \Phi_j$$

$\ominus$  Multiplicando a primeira equação por  $\bar{\Phi}_j$  e a segunda por  $\bar{\Phi}_i$  e subtraindo a primeira da segunda:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \bar{\Phi}_i M \bar{\Phi}_j = 0 \quad (\text{explorando a simetria de } M \text{ e } K)$$

Tendo em vista que  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$

$$\bar{\Phi}_i M \bar{\Phi}_j = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_j K \bar{\Phi}_i = 0 \quad (6)$$

O que significa que os autovetores (ou modos) são ortogonais nos produtos internos induzidos por  $M$  ou  $K$ .

Por outro lado,

$$M \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 & \dots & \bar{\Phi}_n \end{bmatrix}}_X = K \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 & \dots & \bar{\Phi}_n \end{bmatrix}}_X \quad \left| \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \omega_1^2 & & \\ 0 & & \lambda_n \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \right.$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore M X = K X \Lambda$$

$$\underline{X^T M X} = \underline{X^T K X} \Lambda$$

(6)  $\rightarrow$  DIAGONAL DIAGONAL

Para uniformizar os autovetores:

$$\bar{\Phi}_i K \bar{\Phi}_i = 1 \quad (i=1, \dots, n) \text{ ou ainda } X^T K X = I$$

(NORMALIZAÇÃO COM RESPEITO À MATRIZ DE RIGIDEZ)

Logo

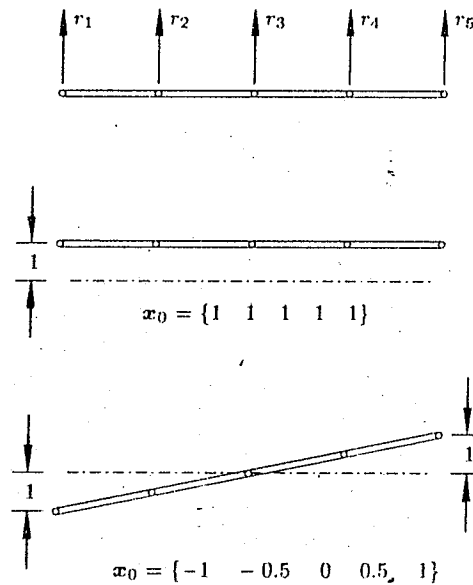
$$X^T M X = \Lambda$$

Autovetores normalizados com respeito à matriz de rigidez também diagonalizam  $M$

4.1.1) CASOS ESPECIAIS: Matrizes de massa ou Rigidez Singulares ou Múltiplas Autovalores

- $K$  --- singular ( $K \Phi_0 = 0$  com  $\Phi_0 \neq 0$ )

ex.:



Logo  $\omega_0^2 M \Phi_0 = K \Phi_0 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = 0$  (supondo  $M \Phi_0 \neq 0$ )

$\Rightarrow$  Dificuldades na obtenção dos demais autovalores

$\rightarrow$  Extraia autovalores

$u = \sum q_i \Phi_i$  --- coord. generalizadas

$u =$	$\left[ \begin{array}{c c} T_0 & T_e \end{array} \right]$	$M_0$ $\rightarrow$ "componentes rígidos"
		$M_e$ $\rightarrow$ "componentes elásticas"
	$\downarrow$ modos rígidos $\downarrow$ modos elásticos	

○ O procedimento pode ser feito através da introdução de "supostos estaticamente determinados" e compensados pela presença dos modos rígidos já identificados

Substituindo a relação acima em (1)

$$M [T_0; T_e] \begin{bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_e \end{bmatrix} + K [T_0; T_e] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de  $T_0$  são formadas pelos modos rígidos

$$K T_0 = 0$$

Logo a equação acima pode ser reescrita através de

$$\begin{bmatrix} M_{00} & M_{0e} \\ M_{e0} & M_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde:  $M_{00} = T_0^T M T_0$

$$M_{0e} = T_0^T M T_e = M_{e0}^T$$

$$M_{ee} = T_e^T M T_e$$

$$K_{ee} = T_e^T K T_e$$

Obs: A primeira equação foi pré-multiplicada por  $[T_0^T; T_e^T]$

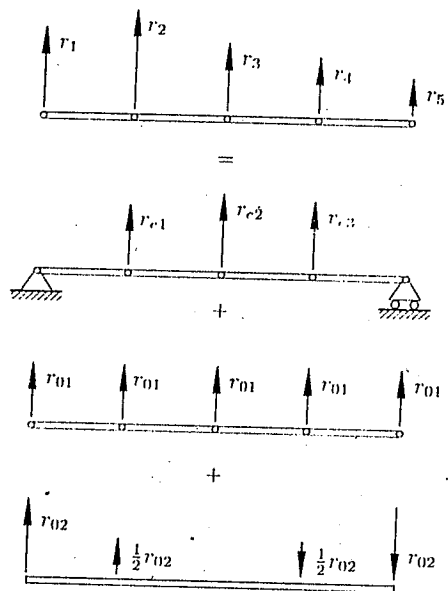
$$\text{Assim: } \ddot{u}_0 = -M_{00}^{-1} M_{0e} \ddot{u}_e \quad (7)$$

Levando a:

$$[M_{ee} - M_{e0} M_{00}^{-1} M_{0e}] \ddot{u}_e + K_{ee} u_e = 0 \quad (8)$$

Obs: Esta equação é definida apenas nas "coordenadas elásticas"





$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{e1} \\ r_{e2} \\ r_{e3} \end{bmatrix}$$

$$r = [T_0 \quad | \quad T_e] \{ r_0 \quad | \quad r_e \}$$

Fig. 4.2.2  
 Free and partly free oscillators:  
 complete motion  $r$  is divided into  
 rigid and elastic components,  $(r_0)$   
 and  $(r_e)$

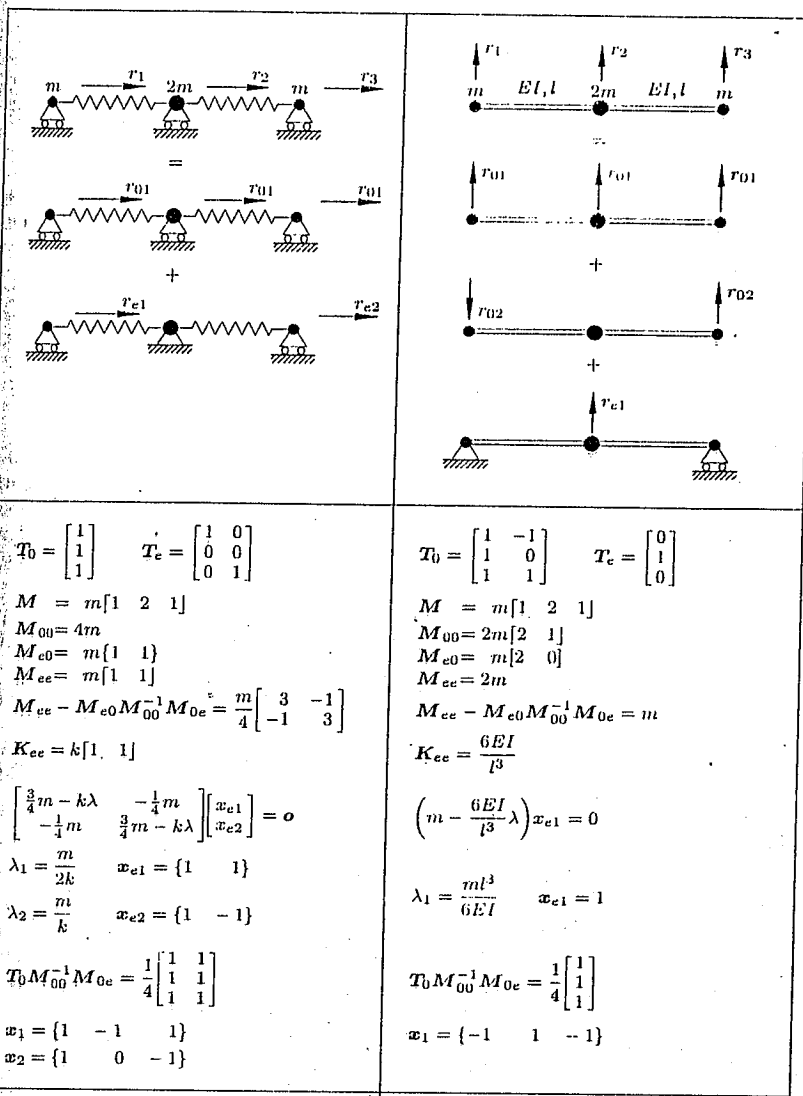


Fig. 4.2.3 Two simple examples demonstrating the analysis of oscillators with singular stiffness, Part 1

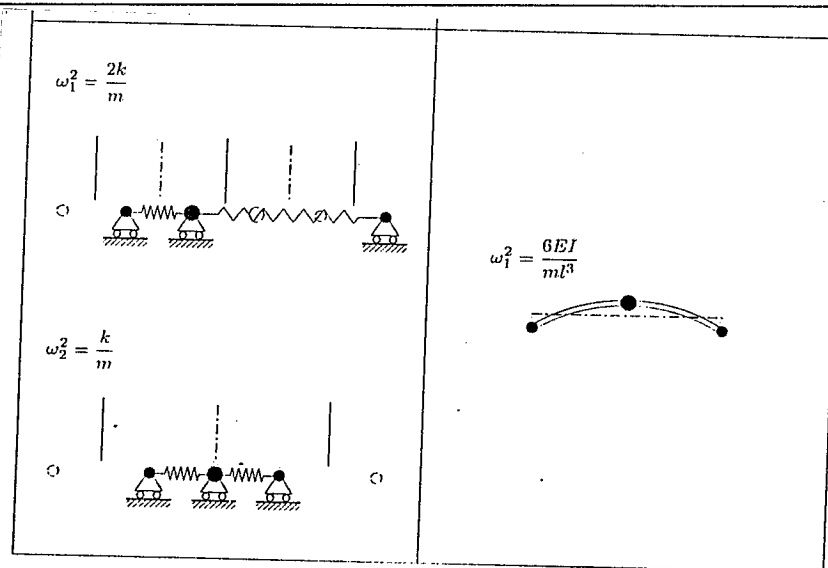


Fig. 4.2.3 Two simple examples demonstrating the analysis of oscillators with singular stiffness, Part 2

• Múltiplos autovalores (caso não degenerado)

$$[M - \lambda_i K] \Phi_i = 0$$

onde  $\lambda_i$  tem multiplicidade  $m_i \rightarrow$  o sistema acima possui  $m_i$  equações dependentes (rank deficiency of  $m_i$ ). Eliminando essas equações:

$$\underbrace{[A]}_{(M \times M)} \cdot \underbrace{[\Phi_i]}_{(M \times 1)} = \underbrace{[0]}_{(M \times 1)}$$

No caso  $m_i = 1$  tivemos a liberdade de escolher um valor de uma coordenada de  $\Phi_i$ . No caso  $m_i > 1$  deverão ser escolhidos  $m_i$  valores e os demais  $\underbrace{(M - m_i)}_{\text{serão}}$  serão solução do sistema acima

CONTINUAR DEPOIS ---

## 4.2) Métodos de Solução p/ Problemas de Autovalores (Autovetores)

Pb: 
$$K u = \omega^2 M u \quad (9)$$

A solução será sempre organizada na forma

$$0 \leq \omega_1^2 < \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

Donavante, a menos de menção em contrário,  $K$  e  $M$  serão consideradas positivas-definidas.

Logo (9) pode ser reescrita na forma mais conhecida de um pb de autovalores, para tanto:

$$K = U^T U \quad \rightarrow \quad \bar{X} = U X \quad (U \text{ definida positiva - "Decomp. Cholesky"})$$

Temos:  $M X = K X \Lambda = U^T \bar{X} \Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\omega_n^2} \end{bmatrix}$$

ou, ainda:  $M U^{-1} \bar{X} = U^T \bar{X} \Lambda$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ M_1 & M_2 & \dots & M_n \end{bmatrix}$$

$$U^{-T} M U^{-1} \bar{X} = \bar{X} \Lambda$$

$A$  ... matriz dinâmica simétrica  
 $(A^T = U^{-T} M^T U^{-1} = U^{-T} M U^{-1})$

levando a formulação p/ o problema de autovalores

$$A \bar{X} = \bar{X} \Lambda \quad \text{ou} \quad A x_i = x_i \lambda_i$$

Escolhendo  $\bar{X}^T \bar{X} = I$

Obs: Na normalização acima  $(UX)^T (UX) = X^T U^T U X = X^T K X = I$  é a mesma coisa que normalizar em relação à  $K$

Temos:  $\underbrace{\bar{X}^t A \bar{X}}_{\text{Diagonal}} = \Lambda$

Tendo obtido  $\bar{X}$   $\rightarrow X = U^{-1} \bar{X}$

A passagem acima representa uma transformação do problema original em um problema especial de autovalores.

4.2.1) Determinação da menor frequência (maior autovalor) e correspondente autovetor: "Iteração sobre os vetores próprios"

Partindo do fato que os autovetores são linearmente independentes ( $\bar{X}^t \bar{X} = I$ ) qualquer vetor de  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito na forma abaixo:

$$z^A = \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i = \bar{X} c$$

onde  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

Obs.:  $c_i$  não são conhecidos ainda, uma vez que  $\bar{X}$  também não é.

Fazendo  $z^A = A z^A = \bar{X} \Lambda \bar{X}^t \bar{X} c = \bar{X} \Lambda c = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \bar{x}_i$

Iterando  $p$  vezes

$$z^{A^p} = \bar{X} \Lambda^p c = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^p \bar{x}_i = c_1 \lambda_1^p \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \lambda_i^p \bar{x}_i$$

ou, ainda:

$$z^p = \lambda_1^p \left( c_1 \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^p \bar{x}_i \right)$$

Como  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1 \rightarrow \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^p \rightarrow 0 \quad p \rightarrow \infty$

Portanto para  $p$  "suficientemente" grande

$$z^p \rightarrow \lambda_1^p c_1 \bar{x}_1$$

$$z^{p+1} \rightarrow \lambda_1^{p+1} c_1 \bar{x}_1$$

logo  $\frac{z^{p+1} \cdot e_j}{z^p \cdot e_j} \approx \lambda_1$  (maior autovalor "aproximante" - supondo  $z \cdot e_j \neq 0$ )

Obs: (i) Dificuldade se o maior autovalor tem multiplicidade  $> 1$   
(ver Angyris)

(ii) O presente método não requer a montagem de matriz dinâmica  $A$  (matriz cheia  $\rightarrow$  perda de esparsidade)

(iii) Algoritmo:

(I) Normalização de estimativa inicial:  $\|\tilde{z}^k\| = 1$   $\tilde{z}^k \rightarrow \tilde{z}^k$

(II) Resolver  $U s = \tilde{z}^k$  (Regra Substituição - Sistema Triangular)

(III)  $t = M s$

(IV) Resolver  $U^t z^{k+1} = t$  ( " " " )

(V)  $\lambda_1^{(k)} = z^{k+1} \cdot \tilde{z}^k = \left(\frac{1}{w_1^k}\right)^2$   $\lambda_1^{(k)}$  e  $\lambda_1$  conhecidos

(VI) Se  $k+1 < p$  voltar a (I) (falou de convergência)

Os passos (II) - (IV) são a implementação de  $z^{k+1} = \frac{A}{U^t M U^{-1}} \tilde{z}^k \left| \begin{array}{c} \lambda_1^{k+1} - \lambda_1^{k-1} \\ \lambda_1^k \end{array} \right|$

(iv) Escolha do vetor  $z^1$ :  $z^1 \cdot \bar{x}_1 = 0$  ( $c_1 = 0$  pb.)

(Ver sugestões Angyris)

(v) Vantagens do Método:

(1)  $M$  e  $U$  são esparsas (grandes dimensões)

(2) Sistemas são resolvidos por regra-substituição

(3)  $A$  decomposta  $A = U^t U$  pode ser obtida aproveitando análise estática anterior

$$z_{k+1} = A \tilde{z}^k, \quad \tilde{z}^k \approx \bar{x}_1 \rightarrow z_{k+1} = \lambda \bar{x}_1 \approx z_{k+1} \cdot \tilde{z}^k \approx \lambda \bar{x}_1$$

(vi) Desvantagens

(1) Em caso de multiplicidade  $> 1$   $\rightarrow$  só é calculado um único autovalor

(2) Convergência prejudicada p/ o caso de autovalores próximos,

(mínimo de iterações)  $N \approx \frac{1}{\log(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})}$   $\rightarrow$  mínimo de dígitos significativos

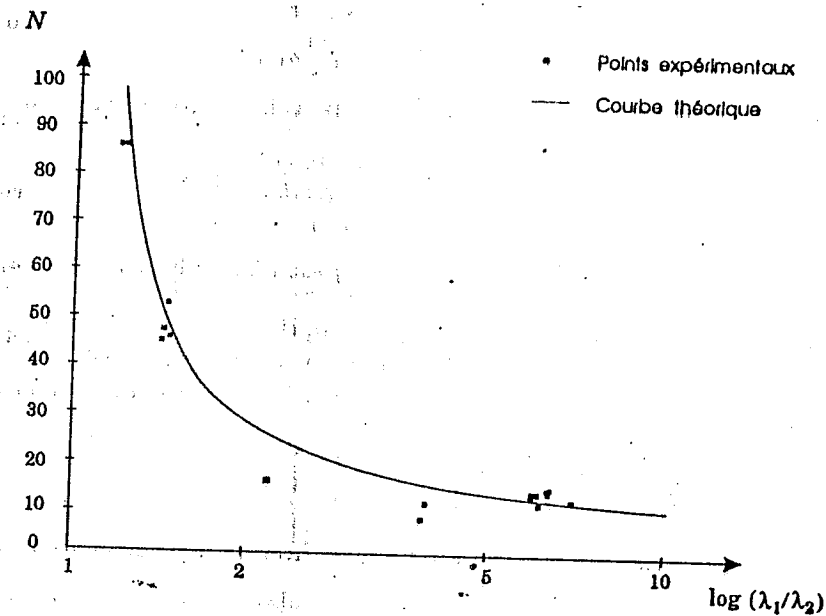
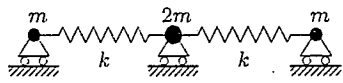


figure 6.5.1  
Convergence de la méthode de la puissance :  
 $n=100, t=8$

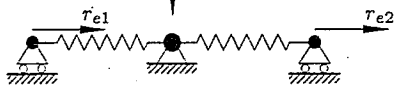
# Exemplo:



$$M_{ee} - M_{e0}M_{00}^{-1}M_{0e} = \frac{m}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = M_e$$

$$K_{ee} = kI_2 \Rightarrow U_e = \sqrt{k} I_2$$

$r_{e1}$  predominates in  $x_{e1}$



	0	1	2	3	4	5	exact
$\bar{x}_e^{(k)}$ normalised	$\begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.95 \\ -0.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.86 \\ -0.52 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.79 \\ -0.62 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.75 \\ -0.66 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.73 \\ -0.68 \end{bmatrix}$	
$s = U_e^{-1} \bar{x}_e^{(k)}$ $= x_{e1}^{(k)}$	$\frac{1}{\sqrt{k}} \bar{x}_e^{(k)}$	←	←	←	←	←	$\frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 0.71 \\ -0.71 \end{bmatrix}$
$t = M_e s$	$\frac{m}{4\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\frac{m}{4\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 3.17 \\ -1.91 \end{bmatrix}$	$\frac{m}{4\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 3.10 \\ -2.42 \end{bmatrix}$	$\frac{m}{4\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 2.99 \\ -2.65 \end{bmatrix}$	$\frac{m}{4\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 2.91 \\ -2.73 \end{bmatrix}$	$\frac{m}{4\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 2.87 \\ -2.77 \end{bmatrix}$	
$\bar{x}_e^{(k+1)} = U_e^{-1} t$	$\frac{1}{\sqrt{k}} t$	←	←	←	←	←	
$\lambda_1^{(k)} = [\bar{x}_e^{(k-1)}]^t \bar{x}_e^{(k)}$	$0.75 \frac{m}{k}$	$0.91 \frac{m}{k}$	$0.98 \frac{m}{k}$	$1.00 \frac{m}{k}$	$1.00 \frac{m}{k}$	$0.99 \frac{m}{k}$	$\frac{m}{k}$
$ \bar{x}_e^{(k+1)} $	$3.16 \frac{m}{4k}$	$3.70 \frac{m}{4k}$	$3.93 \frac{m}{4k}$	$4.00 \frac{m}{4k}$	$3.99 \frac{m}{4k}$	$3.99 \frac{m}{4k}$	
$(\omega_1^{(k)})^2 = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}$	$1.33 \frac{k}{m}$	$1.10 \frac{k}{m}$	$1.02 \frac{k}{m}$	$1.00 \frac{k}{m}$	$1.00 \frac{k}{m}$	$1.01 \frac{k}{m}$	$\frac{k}{m}$



4.2.2) MÉTODOS DE LANZOS:

- Método de Jacobi → "Diagonalização de A" (Método Direto - Todos Espectros)

Lembrando que  $A\bar{X} = \bar{X} \underbrace{\Lambda}_{\text{Diagonal}}$  ou  $\Lambda = \bar{X}^{\pm} A \bar{X}$

- Método de Householder: → Gerando matrizes tridiagonais (Parte do Espectro)

$$A = Q^T \overset{m \times m}{T} \underset{\substack{\text{matriz} \\ \text{tridiagonal}}}{Q} \quad (n \times n)$$

de forma que:  $\Lambda = \bar{X}^{\pm} A \bar{X} = \bar{X}^{\pm} Q Q^{\pm} A Q Q^{\pm} \bar{X} = \bar{X}^{\pm} Q T Q^{\pm} \bar{X} = X_T^{\pm} T^{\pm} X_T$

onde  $\bar{X} = Q X_T$

ou seja: as matrizes que "tridiagonalizam" A são relacionadas com os autovetores pela expressão acima e geram  $\Lambda$  (os autovalores). Reparar que A e T possuem os mesmos autovalores ( $A v = \lambda v \Rightarrow T Q v = \lambda Q v$ )

- Lanzos. ("Método Direto" - nº finito de iterações para alcançar T)

$$A \bar{X} = \bar{X} \Lambda$$

Obs: não será necessária a montagem da matriz A

p- etapas

$$V^p = \begin{bmatrix} z & A z & A^2 z & \dots & A^{(p-1)} z \end{bmatrix}$$

↓  
z

matriz  $m \times p$  (cresce a cada iteração)  
 ↳ Krylov matrices  
 ↳ subespaço gerado pelos vetores coluna. sub-espaço de Krylov



• Uma base  $Q$  para o sub-espaço associado à  $V^{(p)}$  através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt's, gerando:

$$Q^{(p)} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_p]$$

tal que  $Q^{(p)\top} Q^{(p)} = I_{(p)} \rightsquigarrow$  identidade  $p \times p$

• A forma especial de  $V^{(p)}$  irá garantir que

$$Q^{(p)\top} A Q^{(p)} = T^{\top} \text{ (tridiagonal)}$$

$$T^{\top} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \beta_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_p \end{bmatrix}_{p \times p}$$



• Cada etapa do processo será constituída de obtenção da nova coluna de  $V$  assim como da nova coluna de  $Q$  (ou seja: a extensão do sub-espaço de Krylov e a ortogonalização são efetuadas simultaneamente). Isso é possível, pois:

• Estender  $V^{(p-1)} \rightarrow V^p$  significa adicionar uma coluna  $A(A^{p-2}v) = \sum_{k=1}^{p-1} c_k A q_k \in Q^{(p-2)}$

• Já que  $q_p \cdot (A q_i) = 0 \quad (i < p-1; *)$

$$\text{Temos } A^{p-1} v \cdot q_p = \sum_{k=1}^{p-1} c_k A q_k \cdot q_p = c_{p-1} A q_{p-1} \cdot q_p \text{ (só toca uma coluna)}$$

$\Rightarrow$  FORMA TRIDIAGONAL (A SIMÉTRICA)

$$* \left\{ \begin{array}{l} q^p \perp Q^{(p-1)} \supset Q^{(p-2)} \dots \\ A q_1 \in Q^{(1)}, A q_2 \in Q^{(2)} \dots A q_{p-1} \in Q^{(p)} \end{array} \right.$$

A Por outro lado, sabemos que:

$$AQ^P = Q^P T^P$$

ou seja

$$Aq_j = \beta_{j-1} q_{j-1} + \alpha_j q_j + \beta_j q_{j+1}$$

$\Downarrow$   
j-ésima coluna

de  $AQ^P$

$\Downarrow$   
j-ésima coluna de  $Q^P T^P$

calculada através de  $Q^P [T^P]_j$

$\downarrow$  triangular

(ver figura anterior)

Da ortogonalidade levantada anteriormente:

$$\alpha_j = q_j^t A q_j$$

Algoritmo:

$j=0$  ; fazer  $\beta_0 = 1$  ;  $q_0 = 0$  ;  $q_j = \frac{v}{\|v\|}$   $\downarrow$  inicializador

$j=1, m$  ( $\beta_j \neq 0$ , hipótese)

$$\alpha_j = q_j^t (A q_j)$$

$$\bar{q}_{j+1} = (A q_j) - \alpha_j q_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$$

$$\beta_j = \|\bar{q}_{j+1}\|$$

$$q_{j+1} = \frac{\bar{q}_{j+1}}{\beta_j}$$

Começamos com o vetor normalizado  $q_1$ , os elementos de  $T$  e os vetores de Lanczos  $q_i$  são computados sucessivamente:

$$q_1, \alpha_1, \beta_1, q_2, \alpha_2, \beta_2, \dots$$

Obs. (1) Método "banal" quando comparado com "iterações simultâneas" pela necessidade de um menor armazenamento de dados

(2) Quando  $\beta_j$  é igual a zero a tridiagonalização automática para  $P = M$ ; ou  $q_j$  é o vetor "lollán algoritmo", etc..

(3) O método de Lanczos resume-se em:

- Obter uma matriz tridiagonal de ordem  $m$  ( $m \leq n$  e  $m \geq s \sim n^\circ$  de autovalores desejados)
- Calcular os autovalores de  $T$  e realizar verificações de precisão
- Transformar os autovalores para o sistema original ( $\bar{x} = Qx_T$ )

(4) Problemas com a ortogonalização dos vetores de Lanczos, provenientes de possíveis erros de arredondamento, levam a diferença entre autovalores de  $T$  e os da matriz original  $A$ . Na implementação atual fica garantida a ortogonalidade de  $q_p$  com os dois anteriores, o que garante, <sup>aprox</sup> tecnicamente, toda ortogonalidade. Poder-se-ia, numa determinada etapa reortogonalizar todos os vetores, o que seria muito custoso

(5) Problemas com autovalores de multiplicidade maior que um (ver Argynis)

A forma apresentada para o algoritmo de Lanczos implica no uso de um método para obter autovalores de matrizes tridiagonais, o que pode ser feito a pouco custo com métodos como QR ou Jacobi, ou mesmo iteração de vetores.

## ANÁLISE DO DESEMPENHO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DE LANÇOS

PASSO 0: OBTENÇÃO DE  $A = U^{-T} M U^{-1}$

- NA VERDADE A MATRIZ A NÃO É ENCONTRADA E APENAS K É FATORADO NA FORMA  $K = U^T U$

PASSO 1: PROCESSO ITERATIVO

- MAIOR CUSTO MULTIPLICAÇÃO MATRIZ VETOR (NETO SUBST. + MULTIPLICAÇÃO POR M)

SOMANDO PASSO 0 + PASSO 1  $\rightarrow$  75% TEMPO FATURAÇÃO + MULTIPLICAÇÃO  
MATRIZ VETOR ( $75 = 50 + 25$ ) (CRAY-2)  
 $\downarrow$   
FAT. + NETO  $\Rightarrow$  MULTIPL. POR M

Obs: OP. TÍPICAS PARA SEREM VETORIZADAS E PARALELIZADAS

Obs: Comentar um de memória! (CACHE E BANCO DE DADOS)

- COMENTAR DILEMA MATRIZES ESPARSAS X VETORIZAÇÃO