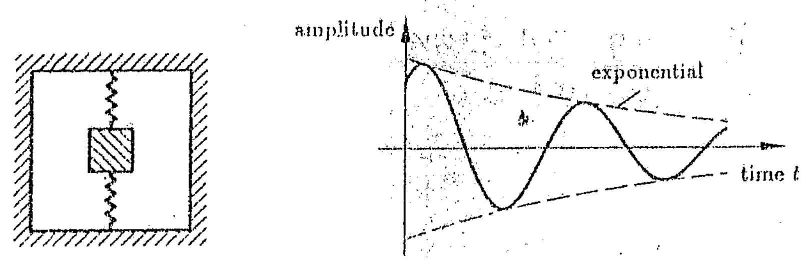
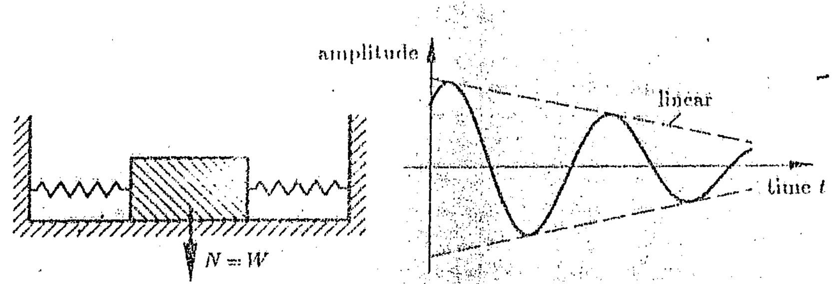
7 - Amortecimento "Modal"

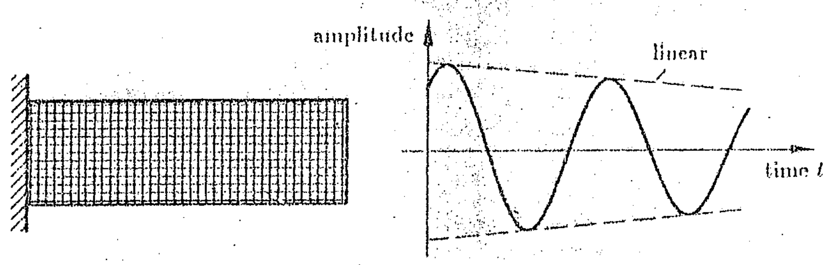
7.1) Aspectos Fenomenológicos



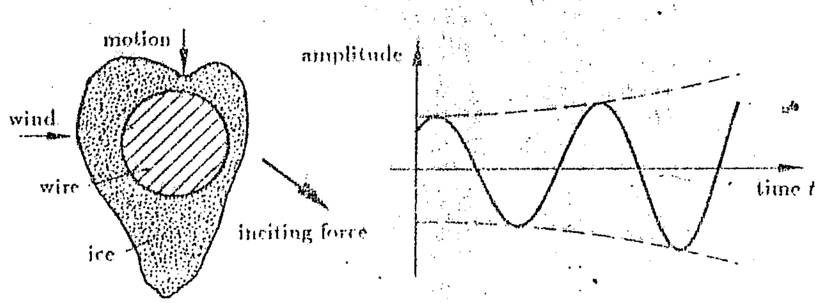
(a) viscous damping (fluid friction on the surface)



(b) Coulomb damping (solid friction on the surface)



(c) structural or hysteretic damping (internal friction of the material)



(d) negative damping (energy extracted from the fluid)

7.2) Amortecimento Viscoso:

"Força Viscosa" : $-\mu \dot{u}$

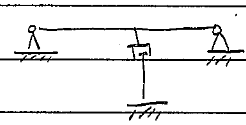
Potência Virtual associada : $\langle -\mu \dot{u}, v \rangle = -\int_\Omega \mu \dot{u} v \, dV$

Versão Discretizada $-\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \mu \left(\sum \dot{u} \varphi_i\right) v$

Gerando a matriz de amortecimento:

$$[C]_{ij} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \mu \, \varphi_i \varphi_j \, d\Omega_e$$

Obs: Caso em que a força viscosa não é distribuída, e.g.



$$\Longrightarrow \quad M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$$

Problema: Como diagonalizar a eq. acima

alternativa: $C = \alpha K + \beta M$

como escolher

$$D = X^t C X = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

onde $d_i = \left(\alpha + \dfrac{\beta}{\omega_i^2}\right)\omega_i^{??}$ ... coeficientes de amortecimento modal

Obs.: Ao invés da opção anterior podemos usar o reconhecimento do fator de amortecimento modal e, se necessário, a posterior obtenção de C através de $C = X^{t-1} D X^{-1}$

7.3) Amortecimento Estrutural

• Fenomenologia

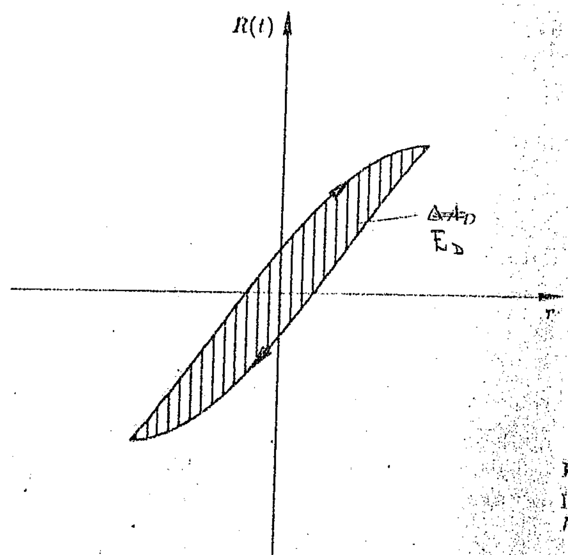


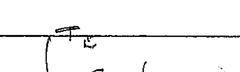
Fig. 1.4.6
Loss of energy due to damping: R/r-diagram

Amortecimento Estrutural observado através de excitação cíclica.

Regime permanente: Energia Cedida = Energia Dissipada

$$E_D = \int_0^{\overset{\text{período}}{T_E}} \underbrace{R(t)}_{\text{força de excitação}} \overset{\text{velocidade}}{\dot{u}}\, dt$$

Fazendo: $R(t) = R_0 \,\text{sen}\, w_E t \rightarrow u(t) = \frac{R_0}{k} V \,\text{sen}(w_E t - \varphi)$

Supondo  e V é o fator de amplificação

$$E_D = \frac{R_0^2}{k} V w_E \int_0^{T_E} \text{sen}(w_E t) \cos(w_E t - \varphi)\, dt = \frac{R_0^2}{k} V \overset{w_E}{\pi} V \,\text{sen}\, \varphi$$

$$2\zeta\omega = \frac{b}{m} = \frac{c}{k}\omega^2$$

$$E_D = \frac{R_0^2}{k}\, \gamma \pi 2\zeta \left(\frac{\omega_E}{\omega}\right) \gamma = b\pi\, \omega_E \underbrace{u_{MAX}^2}_{\frac{R_0}{k}\gamma}$$

Observado: $E_D \propto u_{MAX}$ (e não à ω_E)

$$E_D = b_H\, u_{MAX}^2 \qquad \text{(EXPERIMENTAL)}$$

Amort. Estat ~ Amortecimento Viscoso

$$b_{eq} = \frac{b_H}{\pi \omega_E} \qquad (\text{usar } b_{eq} \sim b)$$

Equação de movimento: $\ddot{u} + \gamma \frac{\omega}{\omega_E}\, \omega \dot{u} + \omega^2 u = (\omega^2) \frac{R_0}{K} \operatorname{sen} \omega_E t$

com $\gamma = \frac{b_H}{\pi k}$

$\gamma \sim 0{,}05$ p/ metais

· Caso Multidimensional

Considerando a excitação $R = a \operatorname{sen} \Omega t$

Resposta em regime permanente $u = d \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi)$

Assim um modelo de atrito viscoso conduziria à

$$R_D = -C\dot{u} = -C d \Omega \cos(\Omega t - \varphi) = f(\Omega)$$

$\rightarrow$ ENERGIA Ω^2

} Contradiz as observações experimentais!

Então $R_D = -\frac{1}{\Omega} C_\beta \dot{u}$

Assim, chegaríamos à equação:

$$M\ddot{u} + \frac{C_s}{\Omega}\dot{u} + Ku = a \operatorname{sen} \Omega t$$

onde $\frac{C_s}{\Omega}$ corresponde à matriz calculada em (7.2).

Para evitar o uso de Ω na equação acima lança-se mão de uma formulação complexa.

$$M\ddot{u}_s + \frac{1}{\Omega} C_s \dot{u}_s + Ku_s = a \operatorname{sen} \Omega t$$

$$M\ddot{u}_c + \frac{1}{\Omega} C_s \dot{u}_c + Ku_c = a \cos \Omega t$$

Fazendo $\tilde{u} = u_c + j u_s$

$$M\ddot{\tilde{u}} + \frac{C_s}{\Omega}\dot{\tilde{u}} + K\tilde{u} = a\, e^{j\Omega t} = \tilde{R}$$

Solução em regime permanente $\tilde{u} = \tilde{b}\, e^{j\Omega t}$

$$\dot{\tilde{u}} = j\Omega \tilde{b}\, e^{j\Omega t} = j\Omega \tilde{u}$$

Voltando à eq. diferencial

$$M\ddot{\tilde{u}} + [K + jC_s]\tilde{u} = \tilde{R}(t)$$

$$C_s \sim K$$

$$M\ddot{\tilde{u}} + (1 + jg)K\tilde{u} = \tilde{R}(t)$$

$g \leq 0.05$ (p/ metais)

LOGO

$$[C]_{i\alpha} = -\frac{1}{\omega_\alpha^2} \int_\Omega R_\alpha \cdot \sigma_i^s$$

7.4) Resposta Dinâmica de sistemas com Amortecimento Modal

$\Longrightarrow$ Análise Espectral do Sistema Conservativo Associado

$$\Lambda \ddot{\eta} + D\dot{\eta} + \eta = R_\eta(t) \qquad (D \text{ ... diagonal})$$

$$\longrightarrow \ddot{\eta}_i + 2\xi_i w_i \dot{\eta}_i + w_i^2 \eta_i = w_i^2 R_{\eta_i}$$

$$\xi_i = \frac{w_i}{2} d_i$$

· Inicialmente $R_\eta(t) = 0$

$$\longrightarrow \ddot{\eta}_i + 2\xi_i w_i \dot{\eta}_i + w_i^2 \eta_i = 0$$

$$\eta_i(t) = e^{-\omega_i \zeta_i t}\left(a_i \sin \omega_{Di} t + b_i \cos \omega_{Di} t\right) \qquad \text{if } \zeta_i < 1 \quad \text{(sub-critical)}$$

$$\eta_i(t) = (a_i + b_i t)\, e^{-\omega_i t} \qquad \text{if } \zeta_i = 1 \quad \text{(critical)}$$

$$\eta_i(t) = a_i e^{-\omega_i(\zeta_i - \sqrt{\zeta_i^2 - 1})t} + b_i e^{-\omega_i(\zeta_i + \sqrt{\zeta_i^2 - 1})t} \qquad \text{if } \zeta_i > 1 \quad \text{(over-critical)}$$

Com $w_{D_i} = w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$

Para o sistema sub-crítico

$$\eta_i = e^{-\omega_i \zeta_i t}\left(\frac{\dot{\eta}_{0i} + \omega_i \zeta_i \eta_{0i}}{\omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}} \sin \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}\, t + \eta_{0i} \cos \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}\, t\right)$$

$$= e^{-\omega_i \zeta_i t}\left(\frac{\dot{\eta}_{0i} + \omega_i \zeta_i \eta_{0i}}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t + \eta_{0i} \cos \omega_{Di} t\right)$$

• Excitação não nula:

$$\eta_i(t) = e^{-\omega_i \xi_i t}\left(a_i \operatorname{sen} \omega_{D_i} t + b_i \cos \omega_{D_i} t\right) + \eta_i^P(t)$$

(amortecimento sub-crítico)

• Mesmo tratamento que no caso sem amortecimento levando à

$$F_i = \frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_i}\right)^2 + j\,2\xi_i\left(\frac{\Omega}{\omega_i}\right)} \Rightarrow V_i = \left(\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_i}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi_i\left(\frac{\Omega}{\omega_i}\right)\right]^2\right)^{-1/2}$$

e $\varphi_i = \tan^{-1} \dfrac{2\xi_i \Omega/\omega_i}{1-(\Omega/\omega_i)^2} \Longrightarrow \eta_i^P = V_i\left(\cos(\Omega t-\varphi_i) + j \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_i)\right)$

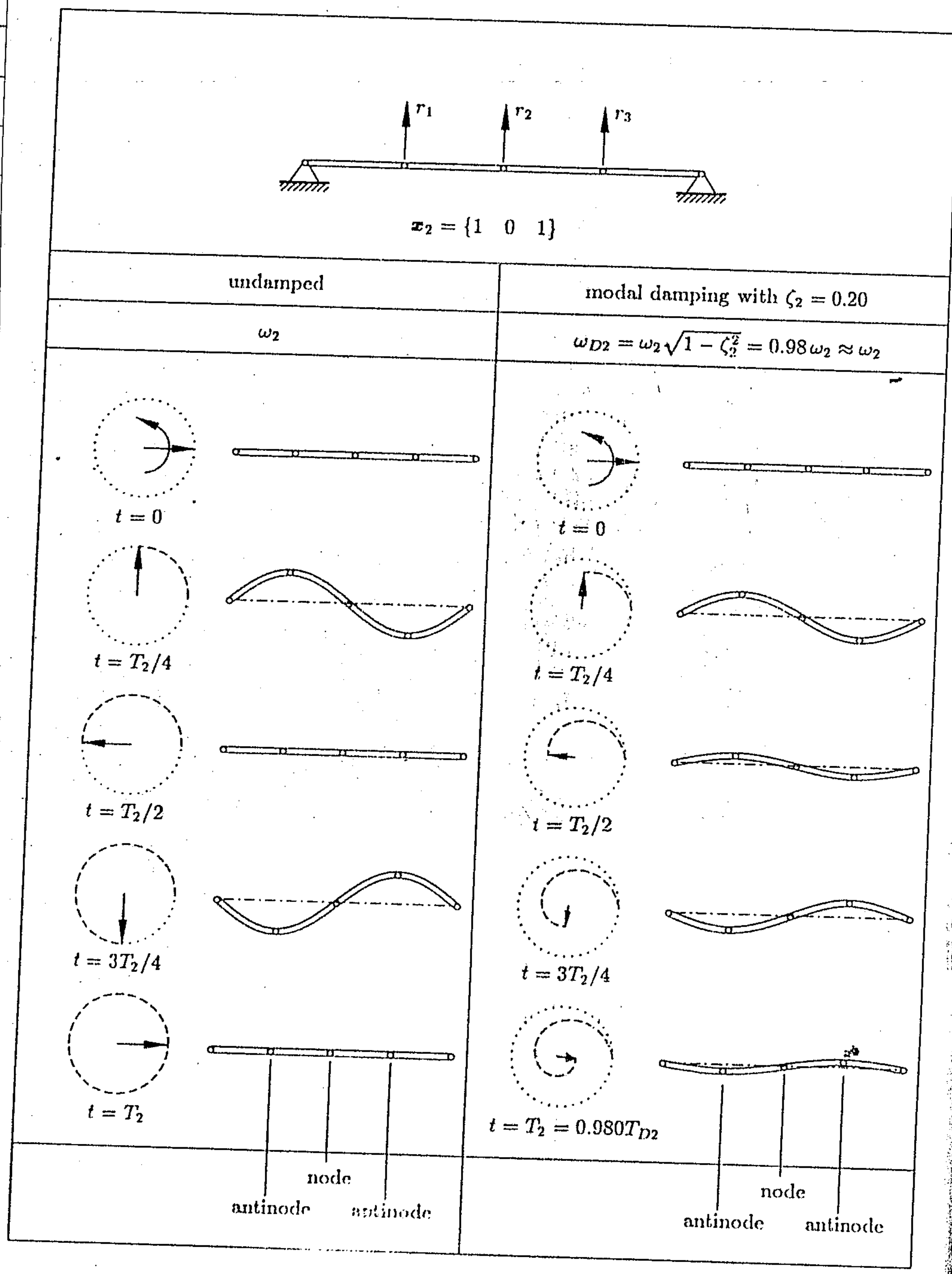


Fig. 7.4.1 Undamped and modally damped eigenoscillations for identical initial conditions recorded at the same instant t