CEFCON
CENTRO DE ESTUDOS EM FABRICAÇÃO E COMANDO NUMÉRICO

Engenharia Mecânica
Politécnica ▪ COPPE
UFRJ

Prof. Anna Carla Araujo
COPPE/UFRJ

PARTE I – Planejamento de Experimentos

Estimativa da Média

Distribuição da Estimativa da Média

- A média amostral nos dá uma estimativa da média populacional μ.
- Porém, como são considerados apenas uma pequena parcela da população, o valor obtido é uma estimativa aproximada de μ.
- Se obtivermos diferentes subconjuntos da população, teremos diferentes valores. Pelo Teorema Central do Limite, quanto maior a amostra, mais ela se aproxima da média populacional.

Distribuição da Estimativa da Média

+ Quão precisa é a média amostral como estimativa da média populacional?

1. A média da distribuição das médias é a média da população e é dada por:

$$E(\bar{x}) = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_1^k \bar{x}_k}{k}$$

Distribuição da Estimativa da Média

2. A variância da distribuição da média, dado um conjunto aleatório de tamanho n, é dado por:

$$Var(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

3. Como a distribuição tem média μ e variância σ_x^2/n e segue a distribuição normal, a relação entre a distribuição das médias e a normal reduzida x, é dada por:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma_x}{n}}$$

Random samples, iid random variables

- **Definition: A random sample** of size n from a given distribution is a set of n independent r.v.'s $X_1, X_2, \ldots, X_n$, each having the given distribution, with expectation $E(X_i) = \mu$ and variance $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Such a set of random variables is also called **independent, identically distributed (iid)**.
- **Sample sum:** $S = \sum_{i=1}^n X_i$. $E(S) = n\mu$, $\mathrm{Var}(S) = n\sigma^2$,
- **Sample mean:** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. $E(\overline{X}) = \mu$, $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$

Normal approximation, Central Limit Theorem

The Central Limit Theorem (CLT) says that the mean and the sum of a random sample of a large enough size[1] from an (essentially) arbitrary distribution have **approximately** normal distribution: Given a random sample $X_1, \ldots, X_n$ with $\mu = E(X_i)$ and $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$, we have:

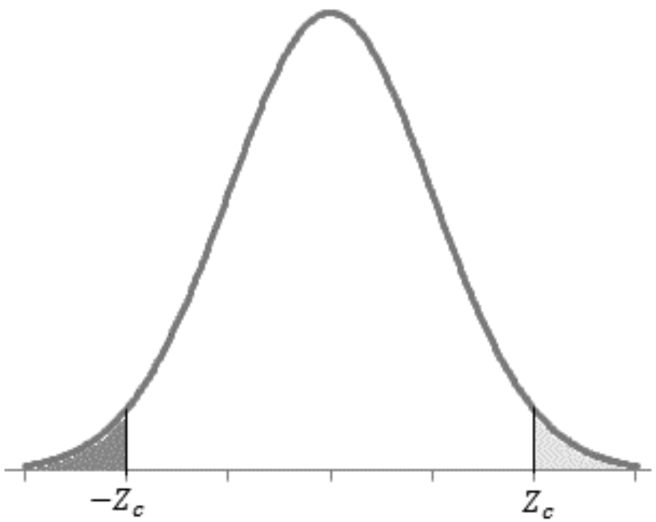
- The **sample sum** $S = \sum_{i=1}^n X_i$ is approximately normal $N(n\mu, n\sigma^2)$.
  Equivalently, the standardized version of S, $S^* = \dfrac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, is approximately standard normal.
- The **sample mean** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ is approximately normal $N(\mu, \sigma^2/n)$.
  Equivalently, the standardized version of $\overline{X}$, $\overline{X}^* = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, is approximately standard normal.

http://www.math.uiuc.edu/~hildebr/370/408clt.pdf

Probabilidade de um erro ***d*** da média

- $P[|\mu - x^{-}| \leq d] = ?$

$$P[|\mu - x^{-}| \leq d] = 2\Phi(d/(\sigma/\sqrt{n})) - 1$$



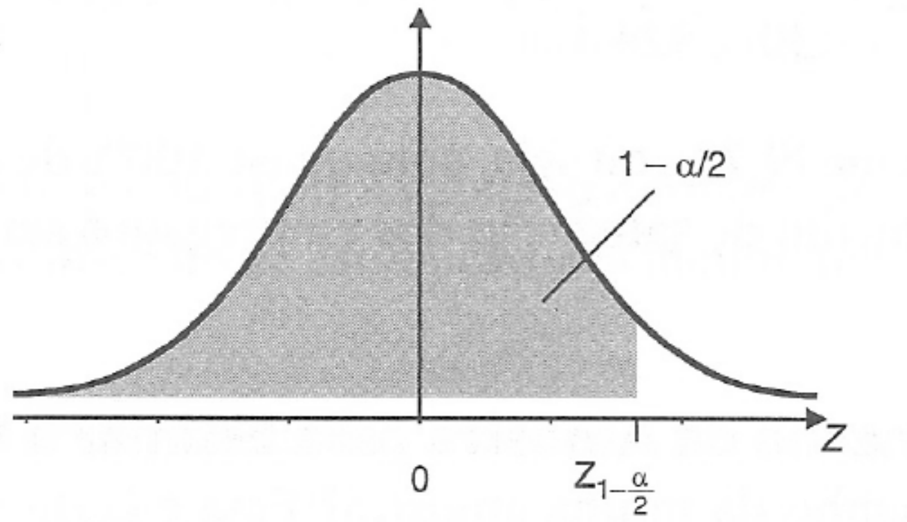


FIGURA 7.3 O quantil $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ da Normal (0,1).

Dimensionamento da Amostra

- Se σ é conhecido:

$$n = (z_{(1-\alpha/2)} . \sigma . d^{-1})^2$$

Dimensionamento de amostra

Para dimensionarmos a amostra, devemos fixar duas constantes:

1. d, a distância máxima considerada tolerável entre a média amostral e a média populacional.
2. α, a probabilidade de a distância entre a média amostral e a média populacional ultrapassar d.

Simbolicamente, para calcularmos o tamanho n da amostra, devemos fixar d e α, ambos pequenos e tais que:

$P[|\overline{X} - \mu| > d] = \alpha$ (o que é equivalente a $P[|\overline{X} - \mu| \leq d] = 1 - \alpha$).

Pode-se mostrar que, neste caso, o tamanho da amostra deve ser

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{d} \right)^2 \qquad (*)$$

Dimensionamento da Amostra

- Se σ é desconhecido:

$$n = (z_{(1-\alpha/2)} . S_1 . d^{-1})^2$$

Onde S_1 é calculado com n_1 inicial