



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Mecânica
Análise Dinâmica de Estruturas - Lista de exercícios
Prof. Daniel

Questão 1. Considere que a função $\varphi : B \rightarrow B_t$ descreve o movimento de um corpo B . A função de mapeamento $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ é dada como segue

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \lambda X \cos(\theta) - Y \sin(\theta) \\ \varphi_2 &= \lambda X \sin(\theta) + Y \cos(\theta) \\ \varphi_3 &= Z\end{aligned}$$

onde $\lambda > 1$.

- Calcule o tensor de deformação de Green \mathbf{E} .
- Calcule o tensor de deformações linearizado ε dado por

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

- Considerando-se $\theta = \pi/3$ e $\lambda = 2$, esboce a forma deformada de um quadrado unitário $OABC$, onde o ponto O está na origem e com os lados OA e OC alinhados com os eixos x e y , respectivamente.
- Sabendo-se que a situação para a qual $\lambda = 1$ corresponde a um movimento de corpo rígido, avalie os componentes de \mathbf{E} e ε para alguns valores de $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comente os resultados.

Questão 2. A figura 1 representa um veículo em movimento plano. Os dispositivos de propulsão do veículo encontram-se ao longo da linha \mathbf{PAQ} . Sabendo-se que as forças de propulsão são praticamente paralelas ao eixo de simetria do veículo, pode-se impor a seguinte restrição cinemática ao sistema: *a velocidade do ponto \mathbf{A} é paralela ao eixo de simetria*. Determine :

- O número de coordenadas necessárias para descrever a configuração do sistema.
- O tipo da restrição cinemática imposta.
- O número de graus de liberdade do sistema.

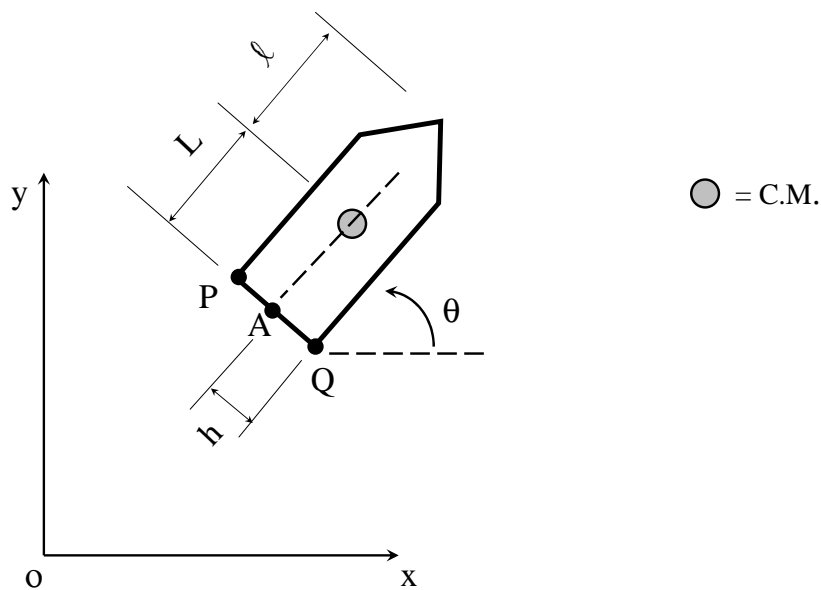


Figure 1: Questão 2.

Questão 3. A figura 2 representa um corpo rígido C que tem movimento plano quando sujeito ao sistema de forças e torques representado por F_1, \dots, F_r e T_1, \dots, T_s . Obtenha as equações de movimento do corpo C a partir do princípio de D'Alembert. Dicas :

- Represente o vetor posição de um elemento diferencial pertencente ao corpo como a soma de \mathbf{p}^* e \mathbf{r} .
- Encontre um conjunto de coordenadas generalizadas convenientes para o problema levando em conta o fato de que o corpo tem movimento plano no referencial inercial analisado.

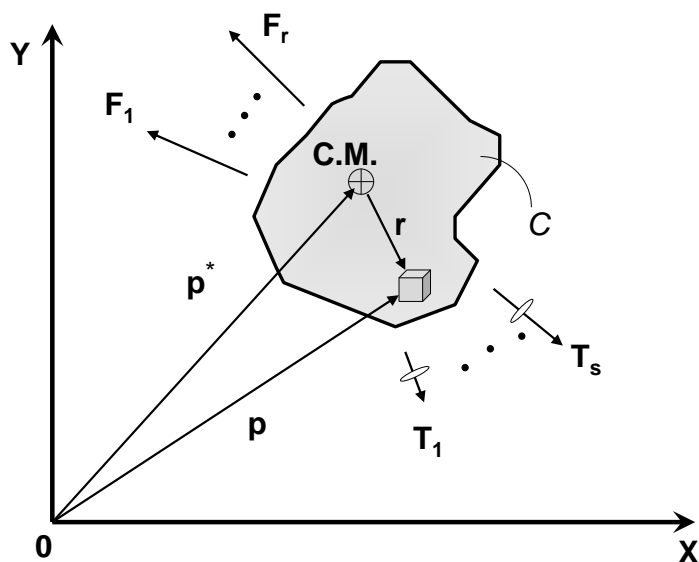


Figure 2: Questão 3.

Questão 4. Obtenha as equações de movimento do sistema apresentado na figura (3) utilizando as equações de Lagrange.

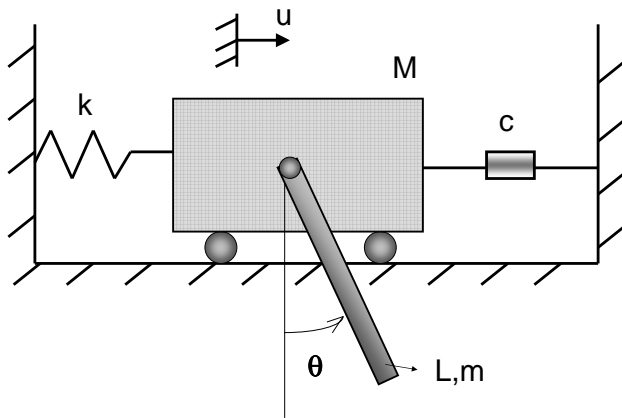


Figure 3: Questão 4.

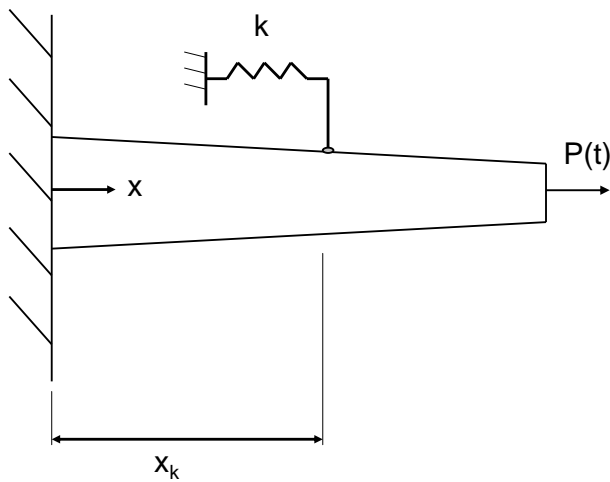


Figure 4: Questão 5.

Questão 5. Considere o sistema representado na figura 4. O sistema corresponde a uma barra engastada com massa específica ρ , módulo de elasticidade E , área da seção transversal variável $A(x)$ e comprimento L . A barra está conectada a uma mola linear de rigidez k e a um amortecedor viscoso com constante de amortecimento c , localizados nas posições $x = x_k$ e $x = x_c$, respectivamente. Na extremidade livre da barra está sendo aplicada uma força $P(t)$. Obtenha as equações de movimento desse sistema.

Questão 6. Considere o sistema de três graus de liberdade mostrado na figura 5.

a) Obtenha a equação de movimento do sistema.

Para os itens abaixo considere $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

b) Escreva o problema de autovetor/autovalor associado.

c) Determine as frequências naturais e os modos de vibração do sistema para a situação na qual $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $k_1 = k$, $k_2 = k$ e $k_3 = 2k$.

d) Determine as frequências naturais e os modos de vibração do sistema para a situação na qual $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $k_1 = 0$, $k_2 = k$ e $k_3 = 2k$.

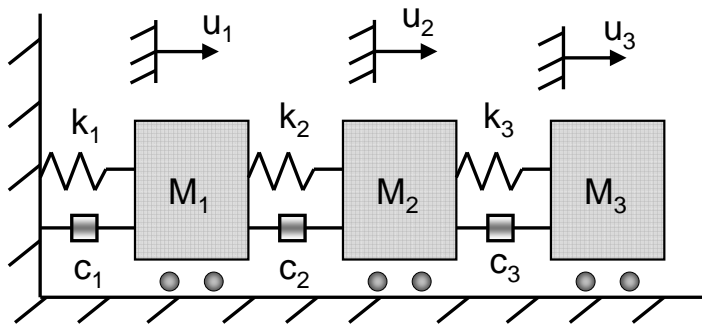


Figure 5: Questão 6.

Questão 7. A treliça ilustrada na figura (6) é constituída de barras metálicas. As barras estão conectadas por juntas que não restringem o movimento de rotação de tal forma que a contribuição de cada uma das barras para a rigidez global do sistema se deve unicamente à sua rigidez axial. Sabendo-se que cada barra possui módulo de elasticidade E , área da seção transversal igual a A , massa específica ρ , determine as frequências naturais do sistema e os respectivos modos de vibração .
P.S.: As frequências naturais estão na tabela 1.

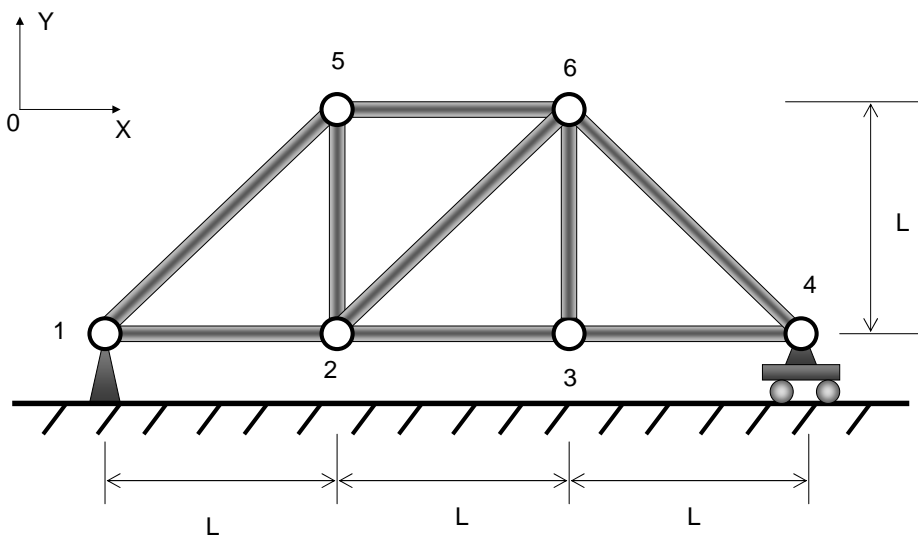


Figure 6: Questão 7.

Table 1: Freqüências naturais da treliça mostrada na figura (6).

r	$\frac{\omega_r}{2\pi} \sqrt{\frac{mL^2}{EA}}$
1	3.428 10^{-2}
2	5.810 10^{-2}
3	8.901 10^{-2}
4	12.15 10^{-2}
5	19.47 10^{-2}
6	23.42 10^{-2}
7	23.96 10^{-2}
8	24.67 10^{-2}
9	33.27 10^{-2}

Questão 8. A viga de alumínio mostrada na figura 7 está presa ao teto de um laboratório por cordas de náilon. As cordas de náilon são utilizadas com a finalidade de simular as condições de contorno do tipo livre-livre. Sabendo-se que a viga tem dimensões $h = 4.75$ mm, $L = 999$ mm e $b = 25.4$ mm, módulo de elasticidade $E = 69$ GPa e massa específica $\rho = 2699$ kg/m³, determine:

- a) As dez primeiras freqüências naturais do sistema (analiticamente).
- b) As dez primeiras freqüências naturais do sistema utilizando um modelo de elementos finitos (calcule as freqüências considerando malhas com $N \in \{5, 10, 20, 40, 100\}$ elementos finitos).
- c) Obtenha as freqüências naturais do sistema no laboratório e compare os resultados com os obtidos nos itens anteriores. Comente sobre as possíveis fontes das discrepâncias entre os resultados.
- d) Refaça o item (b) incluindo no modelo de elementos finitos a massa do acelerômetro utilizado no ensaio dinâmico. Comente os resultados.

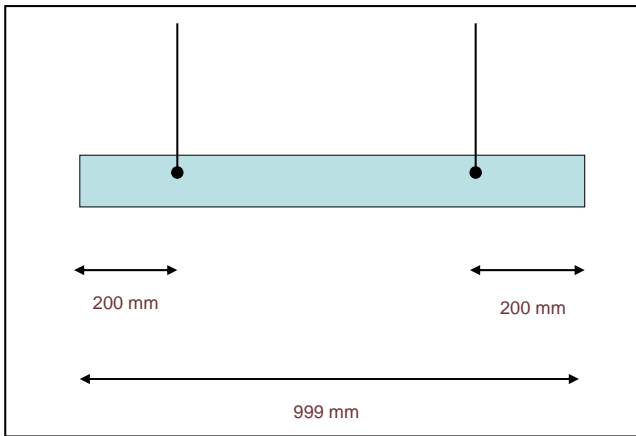


Figure 7: Questão 8.

Questão 9. Determine as frequências naturais do modelo da viga descrita na questão (8) utilizando um modelo reduzido.

Questão 10. A treliça ilustrada na figura (8) é constituída de barras metálicas. As barras estão conectadas por juntas ideais que não restringem o movimento de rotação. Considere que a contribuição de cada uma das barras para a rigidez global do sistema se deve unicamente à sua rigidez axial. Cada barra possui módulo de elasticidade $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, área da seção transversal igual à $A = 10^{-3} \text{ m}^2$, massa específica $\rho = 8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. As dimensões apresentadas na figura são $L = 2 \text{ m}$ e $h = 2 \text{ m}$.

a) Obtenha as frequências naturais do sistema e os respectivos modos de vibração considerando que o suporte conectado ao nó número 9 é completamente rígido (as frequências para o sistema nessa configuração estão na tabela 2).

b) Obtenha as frequências naturais do sistema e os respectivos modos de vibração considerando que o suporte conectado ao nó número 9 possui rigidez $k_0 = 0$. Compare os resultados obtidos nesse item com os obtidos no item (a).

Para os itens abaixo considere que o suporte conectado ao nó número 9 é completamente rígido.

c) Suponha que uma equipe de especialistas, após uma série de ensaios dinâmicos com a estrutura, levantou a hipótese de que uma dada barra pode estar danificada. Desta forma, para dar suporte a essa equipe, faz-se necessário, num primeiro momento, obtermos a sensibilidade das frequências naturais ω_r e dos modos de vibração do sistema \mathbf{u}_r , $r = 1, \dots, 5$, com respeito ao módulo de elasticidade desta barra. Efetue as análises de sensibilidade considerando os seguintes valores de módulo de elasticidade para a referida barra: $E^{barra} = E$ e $E^{barra} = 0.9 \times E$. Considere que as barras compreendidas entre os nós de número 2 e 4 e entre os nós de número 4 e 6 são as barras com elevada probabilidade de estarem danificadas. Comente os resultados.

d) Considere que não temos certeza do valor exato do módulo de elasticidade da barra compreendida entre os nós de número 4 e 6. Após inúmeras reuniões concluímos que o módulo de elasticidade desta barra poderia ser modelado como uma variável aleatória Gaussiana com valor médio igual à E . Utilizando o código que você acabou de construir obtenha o histograma das 5 primeiras frequências naturais do sistema considerando, para a barra em questão, $E^{barra} = E \times (1 + 0.01 * \nu)$, onde ν é uma variável aleatória Gaussiana de média nula e desvio padrão unitário.

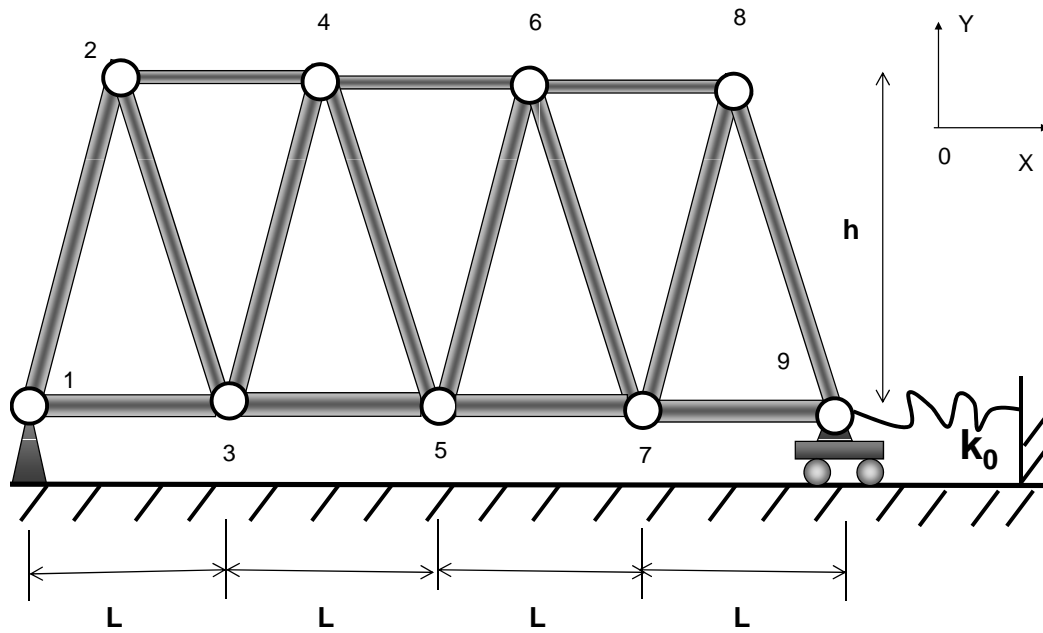


Figure 8: Questão 10.

Table 2: Frequências naturais da treliça mostrada na figura (8).

r	f_r (Hz)
1	73.0
2	135.7
3	187.5
4	309.0
5	338.6
6	361.0
7	455.0
8	523.4
9	562.0
10	598.3
11	618.3
12	640.0
13	772.5
14	785.0